

Práctica No. 3

- (1) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ y $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Decidir en cada caso si corresponde $\subset$, $\supset$ ó $=$ y probarlo.

$$\begin{array}{llll} (i) & f(A \cup B) & \dots\dots & f(A) \cup f(B) \\ (ii) & f^{-1}(X \cup Y) & \dots\dots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\ (iii) & f(A \cap B) & \dots\dots & f(A) \cap f(B) \\ (iv) & f^{-1}(X \cap Y) & \dots\dots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\ (v) & f(\mathbb{R}^n - A) & \dots\dots & \mathbb{R}^m - f(A) \\ (vi) & f^{-1}(\mathbb{R}^m - X) & \dots\dots & \mathbb{R}^n - f^{-1}(X) \end{array}$$

- (2) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$. Probar que f es continua si y sólo si para todo cerrado $F \subseteq \mathbb{R}^m$ existe un cerrado $W_F \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(F) = W_F \cap S$.
- (3) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}^n$. Demostrar que f es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre $\mathbb{Q}^n$ son la misma función.
- (4) Hallar todos los puntos donde la función f es continua, siendo

- (a) $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

- (5) En cada uno de los siguientes casos, decidir si el conjunto dado es abierto o cerrado (o ninguna de las dos cosas) y probarlo:
- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2(e^x - 1) + yx = 1\}$.
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 < xy + z < 2\}$.
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sin^2(x) - xy^2 \geq -2\}$.
- (6) Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. [Sug.: considere la función $x - f(x)$.]
- (7) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua. Probar que el gráfico de f es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^{n+m}$. ¿Vale la recíproca?
- (8) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función tal que la imagen de f es un conjunto acotado y el gráfico de f es un conjunto cerrado. Demostrar que f es continua.
- (9) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.
- (10) Usando la función continua $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ y el ejercicio 11(b) de la guía 2, demostrar que el intervalo $(-1, 1)$ es conexo. Deducir que cualquier intervalo de la forma (a, b) es conexo.
- (11) Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$, el segmento $\overline{vw}$ que une v con w se puede describir como: $\overline{vw} = \{v + t(w - v) : t \in [0, 1]\}$.
- (a) Demostrar que $\overline{vw}$ es un conjunto conexo.

- (b) Sea ahora u otro punto en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que la poligonal $\Pi := \overline{vw} \cup \overline{wu}$ es un conjunto conexo. Convencerse de que cualquier poligonal en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto conexo.
- (c) Sea $S = \mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ (cf. ejercicio 11(a) de la guía 2). Demostrar que dos puntos cualesquiera de S pueden unirse por una poligonal totalmente contenida en S (además formada por segmentos “horizontales” y “verticales”). Deducir que $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ es conexo.
- (12) Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \|x\|$.
 - $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \|x\|^2$.
 - $f : (r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ siendo $f(x) = (\sqrt{x}, \cos x)$, con $r = 0$ y con $r > 0$.
 - $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x, y) = x^2 + 3y$.
 - $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
 - $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = d(x, S)$, donde $S \subseteq \mathbb{R}^n$.
- (13) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario y sean $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones uniformemente continuas.
- Probar que $f + g$ es uniformemente continua.
 - Mostrar con un ejemplo que $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua, aún si alguna de las funciones f ó g es acotada.
 - Probar que si $h : f(S) \rightarrow \mathbb{R}^k$ es otra función uniformemente continua entonces $h \circ f : S \rightarrow \mathbb{R}^k$ también lo es.
- (14) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$. Probar que f es uniformemente continua en $[a, c]$.
- ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y también sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces lo es en $A \cup B$?
- (15) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 y α números reales. Se dice que f es localmente Lipschitz de orden α en el punto x_0 si existen $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que
- $$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \quad \text{para todo } x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$
- Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 entonces f es continua en x_0 .
 - Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0 entonces f es derivable en x_0 .
- (16) Demostrar que las siguientes funciones son uniformemente continuas:
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ siendo $f(x) = (\cos x, \sin x)$.
- (17) Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz pero sin embargo f es uniformemente continua (en particular “unif. cont. $\Rightarrow$ Lipschitz”).
- (18) Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz, es decir, existe $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\|f(x) - f(x')\| \leq M \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in S.$$

Demostrar que si S es cerrado, $M < 1$ y $f(S) \subseteq S$ entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$, en otras palabras, f tiene un punto fijo.

[Sug.: considere la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S construída recursivamente así: $x_1 \in S$ cualquiera, si x_n está definido se toma $x_{n+1} := f(x_n)$, en otras palabras, $x_{n+1} := f^{(n)}(x_1)$. Demostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy; tomar $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.]

Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone S cerrado.

- (19) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2}$. Demostrar que f es Lipschitz con $M = 1$ pero que f no tiene puntos fijos.
- (20) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $f : K \rightarrow K$ una función tal que $\|f(x) - f(x')\| < \|x - x'\|$ para todo $x, x' \in K$ (en particular, f es Lipschitz con $M = 1$). Demostrar que f tiene un punto fijo (comparar con los ejercicios 6, 18 y 19).
[Sug.: considere la función $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \|x - f(x)\|$.]
- (21) Considérese el conjunto $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Dado que este conjunto es numerable e infinito se puede escribir: $\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Se define $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ de la manera siguiente:

$$f(x) = \sum_{n \in \Omega_x} \frac{1}{2^n}$$

donde $\Omega_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x\}$.

Demostrar que:

- (a) f está bien definida.
 (b) f es una función monótona creciente.
 (c) f es discontinua en todo punto del conjunto $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$; más aún: para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f(x_n+) - f(x_n-) = \frac{1}{2^n} > 0$.
 (d) f es continua a izquierda en todo $x \in (0, 1)$; es decir, para todo $x \in (0, 1)$ vale que $f(x-) = f(x)$.
 (e) f es continua en todo punto del conjunto $(0, 1) - \mathbb{Q}$.
- (22) En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en el conjunto $S \subset \mathbb{R}$:
- (a) $f_n(x) = x^n$, $S = (-1, 1]$.
 (b) $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$, $S = (1, +\infty)$.
 (c) $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$, $S = [0, 1]$.
- (23) (a) Probar que la sucesión del ejercicio 22(a) converge uniformemente en $T = (0, 1/2)$, pero en $S = (-1, 1]$ converge puntualmente a una función que no es continua.
 (b) Probar que la sucesión del ejercicio 22(b) converge uniformemente en $T = [2, 5]$.
- (24) Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:
- (a) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, sobre todo $\mathbb{R}$.
 (b) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, sobre todo $\mathbb{R}$.
 (c) $f_n(x, y) = \frac{1}{n+1} (x, y)$, sobre todo $\mathbb{R}^2$.
 (d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ b + \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{a}{b}, b > 0 \text{ y } (a : b) = 1 \end{cases}$, sobre $[0, 1]$.
- (25) Probar que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$

converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a una función continua, pero la convergencia no es uniforme.

(26) Sea $S \subset \mathbb{R}^N$ y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que si f_n es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces vale:

(a) f es acotada.

(b) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in S$ y todo $n \in \mathbb{N}$ (en otras palabras, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada).

(27) Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n.$$

(a) Probar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función cero en el intervalo $[0, 1]$.

(b) Verificar que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ y que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx$.