INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

ANÁLISIS II – MATEMÁTICA 3

NOEMÍ WOLANSKI

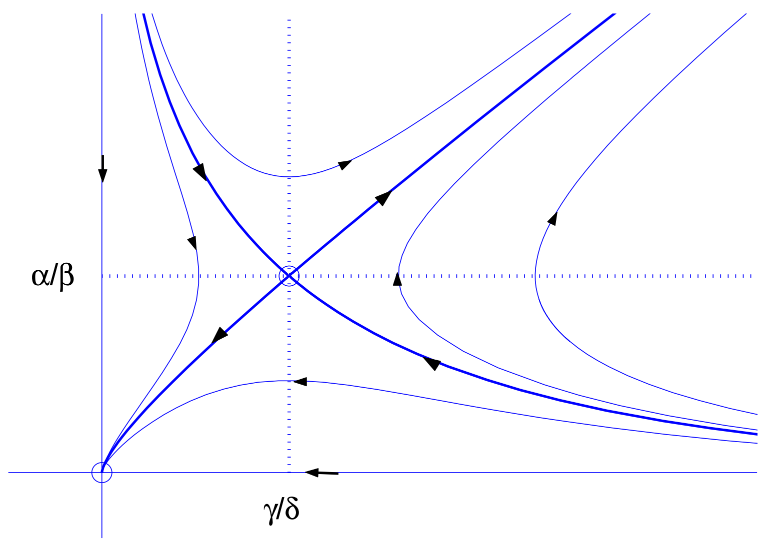


Diagrama de fases para dos poblaciones simbióticas

Índice General

Preliminares

El objetivo de estas notas es dar una introducción al tema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (en adelante ODE) a nivel elemental. Las notas están dirigidas a estudiantes de la materia Análisis II – Matemática 3 de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Al diseñar estas notas debemos tener en cuenta que en esta materia el tema de ODE se dicta en no más de 5 semanas. Es por esta razón que ciertos temas se dejan para desarrollar en los trabajos prácticos. Entre esos temas están los métodos de resolución de ecuaciones de primer orden y muchos ejemplos de aplicaciones que están como ejercicio para los alumnos.

En estas notas discutiremos algunos problemas en los cuales aparecen ODE, daremos la demostración del Teorema de Existencia y Unicidad local de solución y analizaremos el dominio de definición de las mismas. A fin de dar claridad al texto, daremos las demostraciones bajo condiciones simples.

Se darán los métodos de resolución de ecuaciones y sistemas lineales a coeficientes constantes (tanto homogéneos como no homogéneos).

Por otro lado, se discutirá la noción de diagrama de fases y su relación con la posibilidad de predicción del comportamiento de las soluciones sin conocer una fórmula analítica de las mismas. Se verá cómo son los diagramas de fases de sistemas lineales a coeficientes constantes de dimensión 2 y también para sistemas no lineales conservativos. Se discutirá la noción de estabilidad lineal y se utilizará para determinar la estabilidad de equilibrios de sistemas no lineales de dimensión 2.

1. Introducción

1.1. **Generalidades.**

Sea $V(t,x,y,z)$ un campo de velocidades correspondiente a un fluido (por ejemplo). En el curso ya vimos que una partícula que se mueve en el fluido sigue una trayectoria $\sigma(t)$ tal que su vector velocidad, $\sigma'(t)$, verifica $\sigma'(t) = V(t,\sigma(t))$ para todo tiempo t.

Esto es un sistema de ecuaciones diferenciales de 1er. orden. A saber, si $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ se debe tener para todo t,

$$\begin{cases} x' = V_1(t,x,y,z), \\ y' = V_2(t,x,y,z), \\ z' = V_3(t,x,y,z). \end{cases} \tag{1.1}$$

Claramente, para determinar la posición de una partícula en un instante t debemos conocer también su posición en algún instante t_0 ya que en un instante dado habrá partículas en diferentes puntos y por lo tanto sus trayectorias no son iguales.

De modo que lo que nos plantearemos será encontrar una solución de (1.1) sujeta a que $\sigma(t_0) = X_0$ donde $t_0 \in \mathbb{R}$ y $X_0 \in \mathbb{R}^3$ son dados.

Por ejemplo, en una variable podríamos intentar resolver el problema

$$\begin{cases} x' = x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Tenemos $\dfrac{x'}{x} = 1$, pero $\dfrac{x'(t)}{x(t)} = \dfrac{d}{dt}\log x(t)$. Por lo tanto, lo que queremos es que

$$\frac{d}{dt}\log x(t) = 1 \qquad \text{para todo } t.$$

De aquí que se deba tener $\log x(t) = t + c$ para alguna constante c. Como para $t = 0$ tenemos $x(0) = 1$. Debe ser $\log 1 = c$. Esto nos dice que $c = 0$ y por lo tanto $\log x(t) = t$ o lo que es equivalente

$$x(t) = e^t.$$

Por otro lado, si tenemos

$$\begin{cases} x' = x, \\ x(0) = a > 0, \end{cases}$$

la misma cuenta nos da $\log a = c$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \log x &= t + \log a \\ x &= e^{t+\log a} = ae^t. \end{aligned}$$

Vemos que a distintos datos iniciales le corresponden distintas soluciones y además, si son distintas en $t = 0$ son distintas para todo t. Veremos más adelante que este hecho es una propiedad general de las soluciones de ODE que dice que dos trayectorias de partículas diferentes no se cortan.

Veamos otro ejemplo de sistema de ecuaciones.

Supongamos que tenemos una partícula de masa unitaria sujeta a un campo de fuerzas $F = (F_1, F_2, F_3)$. Entonces, como la fuerza es la masa por la aceleración, si $\sigma(t)$ es la trayectoria de la partícula, se verifica

$$\sigma''(t) = F(t, \sigma(t)) \qquad \text{para todo } t.$$

Es decir,

$$\begin{cases} x'' = F_1(t, x, y, z), \\ y'' = F_2(t, x, y, z), \\ z'' = F_3(t, x, y, z). \end{cases}$$

Ahora bien, si llamamos $x_0 = x$, $x_1 = x'$, $y_0 = y$, $y_1 = y'$, $z_0 = z$, $z_1 = z'$. Entonces, obtenemos el siguiente sistema de primer orden:

$$\begin{cases} x_0' = x_1, \\ x_1' = F_1(t, x_0, y_0, z_0), \\ y_0' = y_1, \\ y_1' = F_2(t, x_0, y_0, z_0), \\ z_0' = z_1, \\ z_1' = F_3(t, x_0, y_0, z_0). \end{cases}$$

Este mismo enfoque permite tratar el caso en que el campo de fuerzas depende de la velocidad (x', y', z'). Esto es así cuando, por ejemplo, hay algún tipo de fricción (como la resistencia del aire). Esta fuerza de fricción es proporcional a la velocidad y con sentido opuesto. De modo que en general la fuerza será de la forma $F = F(t, x, y, z, x', y', z')$ y tendremos (reordenando las ecuaciones)

$$\begin{cases} x_0' = x_1, \\ y_0' = y_1, \\ z_0' = z_1, \\ x_1' = F_1(t, x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1), \\ y_1' = F_2(t, x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1), \\ z_1' = F_3(t, x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1). \end{cases}$$

Es decir, un sistema de ecuaciones de la forma

$$\varphi' = G(t, \varphi),$$

donde φ ahora no es la trayectoria de una partícula en el espacio, sino en lo que se llama el "Espacio de Fases" donde una fase es un par (σ, σ') donde σ = posición y σ' = velocidad.

En el espacio de fases φ es una trayectoria del campo G. De modo que cualquier teoría y cualquier información que podamos recoger para sistemas de 1er orden, nos dará información para sistemas de 2do. orden (mediante la reducción descripta arriba). Pero ahora, si queremos determinar la trayectoria σ de la partícula a partir de la trayectoria φ en el espacio de fases, necesitamos datos iniciales para φ y éstos son $\sigma(t_0)$, $\sigma'(t_0)$. Es decir, hay que dar la posición y velocidad en un mismo tiempo t_0 para obtener la trayectoria de una partícula sujeta a un campo de fuerzas. Esto es bastante intuitivo desde el punto de vista físico dado que una partícula sujeta a un campo de fuerzas que empieza, digamos en el instante $t = 0$, en un cierto lugar, podría tener trayectorias distintas si originalmente su velocidad apunta en direcciones distintas.

En general, si tengo una ecuación de orden n:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}), \tag{1.2}$$

podemos reducirla a un sistema de n ecuaciones con n incógnitas de la siguiente forma: Llamamos $x_0 = x$, $x_1 = x'$, $x_2 = x''$, $x_3 = x'''$, $\cdots$, $x_{n-1} = x^{(n-1)}$. Mediante este proceso (1.2) resulta equivalente a

$$
\begin{cases}
x_0' = x_1, \\
x_1' = x_2, \\
x_2' = x_3, \\
x_3' = x_4, \\
\vdots \\
x_{n-2}' = x_{n-1}, \\
x_{n-1}' = f(t, x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}).
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

Luego, en este caso, vemos que tenemos que dar condiciones iniciales

$$x(t_0),\ x'(t_0),\ x''(t_0),\ x'''(t_0), \dots,\ x^{(n-1)}(t_0),$$

para determinar la trayectoria $x(t)$.

Un caso particular de sistemas de ecuaciones de 1er. orden que resultan ser de especial importancia son los sistemas lineales, es decir aquellos sistemas $X' = V(t, X)$, $X \in \mathbb{R}^n$ en donde V es una función lineal de X para cada t y continua con respecto a t. Estos sistemas tienen la forma

$$
\begin{cases}
x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\
x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\
\vdots \\
x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n.
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

Aquí $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X$ y la matriz (a_{ij}) es la matriz asociada a la función lineal V. Los a_{ij} son, en general, funciones continuas de la variable t. Cuando los coeficientes a_{ij} no dependen de t, decimos que se trata de un sistema lineal de 1er. orden con coeficientes constantes.

Uno de los motivos que da especial importancia al estudio de los sistemas lineales, es que los mismos pueden dar información relevante sobre el comportamiento de las soluciones de sistemas más generales (sistemas no lineales). Veremos esto con más detalle en el último capítulo.

1.2. **Descripción de algunos métodos de resolución de ecuaciones de 1er. orden.** Para el caso particular de 1 ecuación de 1er. orden, existen varios métodos para hallar las soluciones. En estas notas sólo mostraremos el más sencillo de estos, que ya hemos usado, y es el llamado *método de separación de variables.* ¿En qué consiste?

Supongamos que la ecuación tiene la forma

$$x' = f(x)g(t),$$

entonces, debe tenerse (si $f(x) \neq 0$)

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = g(t).$$

Sea $F(s) = \int \frac{ds}{f(s)}$, es decir $F'(s) = \frac{1}{f(s)}$. Entonces

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = F'(x(t))x'(t) = \frac{x'(t)}{f(x(t))}.$$

Sea ahora $G(t) = \int g(t)\,dt$. Entonces,

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = \frac{d}{dt}G(t).$$

De aquí que

$$F(x(t)) = G(t) + c \qquad \text{(i.e. } F(x) = G(t) + c)$$

y si podemos despejar de aquí x tendremos la solución general $x(t)$ dependiendo de una constante c a determinar por los datos iniciales.

En la práctica, la forma de escribir este razonamiento es como sigue:

$$x' = \frac{dx}{dt},$$

por lo tanto,

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t).$$

Llevamos todo lo que depende de x a la izquierda y lo que depende de t a la derecha operando con los diferenciales como si fueran números. Entonces se obtiene

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t)\,dt.$$

Integrando a ambos lados (olvidando que dependen de distinta variable, ya que son los diferenciales los que nos dicen respecto de qué variable integramos)

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t)\,dt,$$

o lo que es lo mismo

$$F(x) = G(t) + c.$$

Ejemplo 1.1. Hallemos la solución general de $x' = x^2$. Aplicando el método de separación de variables, tenemos

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x^2} = dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x} = t + c \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{t+c}.$$

Si, por ejemplo, $x(0) = 1$ se tiene $-1 = c$. Por lo tanto la solución es

$$x = \frac{1}{1-t}.$$

Observemos que la solución hallada no está definida para todos los valores de t. El intervalo (que contiene al 0) en donde se encuentra definida la solución es $(-\infty, 1)$ y no puede extenderse más allá de ahí. En principio, de la ecuación diferencial $x' = x^2$, no había ningún elemento que nos hiciera pensar que algo así podría suceder, dado que la función $V(x) = x^2$ es "tan buena" como uno quiere.

Este ejemplo nos dice que en el desarrollo de la teoría general no podemos esperar un resultado de existencia que nos diga que si $V(x)$ es regular entonces vaya a existir una solución definida para todo tiempo t. El resultado de existencia será *local*.

Ejemplo 1.2. Hallar, por el método de separación de variables, las soluciones del problema

$$\begin{cases} x' = \sqrt{x}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Aplicando el método de separación de variables (suponiendo que $x(t) \neq 0$ para $t > 0$ para poder dividir por $\sqrt{x}$) obtenemos

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = dt \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{x} = t + c.$$

Como $x(0) = 0$ se sigue que $c = 0$ y por lo tanto

$$x(t) = \frac{1}{4}t^2.$$

Pero observemos que, como $x'(0) = 0$ podemos prolongar x a $t < 0$ como la función idénticamente nula. Es decir, tenemos una solución dada por

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Por otro lado, si resolvemos por el mismo método este problema con dato inicial 0 dado en un $\tau > 0$ (es decir, pidiendo que $x(\tau) = 0$) y resolviendo para $t > \tau$ obtenemos

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{4}(t-\tau)^2 \quad \text{para } t \geq \tau$$

y como antes podemos extender esta solución a $t < \tau$ como la función idénticamente 0. Es decir, tenemos

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t-\tau)^2 & \text{si } t > \tau, \\ 0 & \text{si } t \leq \tau. \end{cases}$$

Observemos que ambas funciones son solución de la ecuación $x' = \sqrt{x}$ y satisfacen $x(0) = 0$. □

Vemos con este ejemplo que no siempre existe una única solución al problema de valores iniciales. Para obtener unicidad, que desde el punto de vista de las aplicaciones físicas es una propiedad importante, habrá que pedir hipótesis adicionales sobre la función $f(t, x)$ del segundo miembro de la ecuación que garanticen la unicidad. Observar que $f(x) = \sqrt{x}$ no es regular en $x = 0$. En el próximo capítulo estableceremos condiciones que aseguran unicidad de solución.

2. Existencia y unicidad de solución

En este capítulo daremos resultados de existencia y unicidad local de solución para sistemas de 1er. orden de la forma

$$X' = F(t, X).$$

Necesitamos ciertas propiedades del campo F, a saber

Definición 2.1. Sea $F(t, X)$ definida para $t \in I$ y $X \in \Omega$ donde I es un intervalo de la recta y Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que F es *Lipschitz* en la variable X en $I \times \Omega$ si F es continua en las variables t y X en $I \times \Omega$ y existe una constante L tal que para todo $t \in I$, $X, Y \in \Omega$,

$$\|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq L\|X - Y\|.$$

Decimos que F es *localmente Lipschitz* en la variable X en $I \times \Omega$ si para todo intervalo cerrado y acotado J contenido en I y todo conjunto cerrado y acotado Ω' contenido en Ω se tiene que F es Lipschitz en $J \times \Omega'$.

Observación 2.1. La condición de Lipschitz *local* dice que hay una constante como la L de arriba para cada subconjunto $J \times \Omega'$ como los descriptos, pero la constante puede ser distinta para distintas elecciones de los conjuntos. Además es esencial aquí que los conjuntos J y Ω' sean acotados y estén contenidos, junto con sus bordes, en I y Ω respectivamente .

Ejemplo 2.1. Sean I y Ω intervalos de la recta. Si $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ es continua y existe $f_x(t, x)$ y es continua en $I \times \Omega$, se sigue que f es localmente Lipschitz en la variable x en $I \times \Omega$.

En efecto, sea J un intervalo cerrado y acotado contenido en I y sea Ω' un intervalo cerrado y acotado contenido en el intervalo Ω. Sea $L = \max\{|f_x(t, x)| \,:\, t \in J\,,\, x \in \Omega'\}$. Si $t \in J$, $x, y \in \Omega'$ se tiene

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |f_x(t, \theta)\,(x - y)| \leq L\,|x - y|,$$

ya que θ es un punto en el intervalo de extremos x e y y por lo tanto pertenece al intervalo Ω'. $\square$

Observación 2.2. El ejemplo 2.1 se generaliza a $\mathbb{R}^n$ pero no haremos los detalles aquí.

Ejemplo 2.2. Sea $F(t, X) = A(t)\,X + b(t)$ con $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b(t) \in \mathbb{R}^n$. Si los coeficientes $a_{ij}(t)\,,\, b_i(t)$ de la matriz $A(t)$ y el vector $b(t)$ son funciones continuas de la variable t en un intervalo I se sigue que F es localmente Lipschitz en la variable X en $I \times \mathbb{R}^n$. Si el intervalo I es cerrado y acotado, F es Lipschitz en la variable X en $I \times \mathbb{R}^n$.

En efecto, sólo tenemos que ver esta última afirmación. Sea K una constante mayor que $|a_{ij}(t)|$ para $t \in I$ y para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|A(t)X - A(t)Y\|^2 = \|A(t)(X - Y)\|^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(x_j - y_j)\right)^2 \\ &\leq C_n \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(t)|^2 (x_j - y_j)^2 \leq C_n K^2 n\,\|X - Y\|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|A(t)X - A(t)Y\| \leq L\|X - Y\|$ donde $L^2 = C_n K^2 n$ y se sigue que $F(t, X)$ es Lipschitz con constante L ya que $F(t, X) - F(t, Y) = A(t)X - A(t)Y$. □

Estamos en condiciones de enunciar el teorema de existencia de solución para un sistema de 1er. orden.

Teorema 2.1. *Sean I un intervalo de la recta y Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $F(t, X)$ un campo localmente Lipschitz en la variable X en $I \times \Omega$. Sean $\tau \in I$ y $\xi \in \Omega$. Si τ es interior a I, existen $\lambda > 0$ y una función continuamente diferenciable $X : [\tau - \lambda, \tau + \lambda] \subset I \to \Omega$ tales que*

$$\begin{aligned} &X'(t) = F(t, X(t)), \quad \textit{para todo } t \in [\tau - \lambda, \tau + \lambda],\\ &X(\tau) = \xi. \end{aligned}$$

Si τ es el extremo izquierdo de I, existen $\lambda > 0$ y una función continuamente diferenciable $X : [\tau, \tau + \lambda] \subset I \to \Omega$ tales que

$$\begin{aligned} &X'(t) = F(t, X(t)), \quad \textit{para todo } t \in [\tau, \tau + \lambda],\\ &X(\tau) = \xi. \end{aligned}$$

Se tiene el resultado análogo si τ es el extremo derecho del intervalo I.

Observación 2.3. Este teorema no lo demostraremos con esta generalidad. Daremos la demostración de una versión muy simplificada para el caso de una ecuación. A saber,

Teorema 2.2. *Sea I un intervalo de la recta. Sea $f(t, x)$ una función Lipschitz en la variable x en $I \times \mathbb{R}$. Sean $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}$. Si τ es interior a I, existen $\lambda > 0$ y una función continuamente diferenciable $x : [\tau - \lambda, \tau + \lambda] \subset I \to \mathbb{R}$ tales que*

$$\begin{aligned} &x'(t) = f(t, x(t)), \quad \textit{para todo } t \in [\tau - \lambda, \tau + \lambda],\\ &x(\tau) = \xi. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Se tienen los resultados análogos si τ es un extremo del intervalo I.

Demostración. Supongamos que $x(t)$ es una solución del problema. Integrando la ecuación diferencial a partir de τ y usando la condición inicial tenemos

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))\, ds, \qquad \text{para } t \text{ en } [\tau - \lambda, \tau + \lambda]. \tag{2.2}$$

Recíprocamente, si $x(t)$ es una función continua en $[\tau - \lambda, \tau + \lambda]$ y es solución de la ecuación integral (2.2) se sigue que x es continuamente diferenciable y que $x' = f(t, x)$. Por otro lado, evaluando en $t = \tau$ en la ecuación integral (2.2) vemos que $x(\tau) = \xi$. Por lo tanto (2.2) es equivalente a (2.1). El método de construcción de una solución será, por lo tanto, buscar una solución de la ecuación integral. Y ésto lo haremos por un método iterativo. A saber, definiremos inductivamente

$$\begin{aligned} &x_0(t) = \xi,\\ &x_1(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x_0(s))\, ds, \end{aligned}$$

e, inductivamente,

$$x_k(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x_{k-1}(s))\, ds. \tag{2.3}$$

Observemos que estas funciones están definidas en I.

Si probamos que la sucesión de funciones continuas $x_k(t)$ converge uniformemente en $[\tau - \lambda, \tau + \lambda]$ a una función $x(t)$ se tendrá, por un lado, que $x(t)$ es continua en $[\tau - \lambda, \tau + \lambda]$ y, por el otro, que

$$\int_\tau^t f(s, x_k(s))\, ds \to \int_\tau^t f(s, x(s))\, ds.$$

Por lo tanto x será una solución continua de (2.2) y en consecuencia una solución de (2.1).

Veamos entonces que la sucesión de funciones así construida converge uniformemente en $[\tau - \lambda, \tau + \lambda]$ para algún $\lambda > 0$. Para eso, veamos que existe $\lambda > 0$ tal que la sucesión es uniformemente de Cauchy en $[\tau - \lambda, \tau + \lambda]$. Esto significa que satisface que para todo $\varepsilon > 0$, existe k_0 tal que para todo $t \in [\tau - \lambda, \tau + \lambda]$ y $k, j \geq k_0$,

$$|x_k(t) - x_j(t)| < \varepsilon.$$

Con este fin acotaremos primero las diferencias de dos términos consecutivos. Para esto necesitaremos utilizar la condición de Lipschitz en la variable x de f en $I \times \mathbb{R}$. Sea L la constante de Lipschtiz, entonces como

$$x_{k+1}(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x_k(s))\, ds,$$
$$x_k(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x_{k-1}(s))\, ds,$$

restando ambas ecuaciones vemos que

$$x_{k+1}(t) - x_k(t) = \int_\tau^t [f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s))]\, ds.$$

De aquí que, para $t \geq \tau$,

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \int_\tau^t |f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s))|\, ds \leq L \int_\tau^t |x_k(s) - x_{k-1}(s)|\, ds.$$

Sea ahora $\lambda \leq \dfrac{1}{2L}$ tal que $I_\lambda := [\tau - \lambda, \tau + \lambda] \subset I$. Entonces,

$$\begin{aligned}\max\{|x_{k+1}(t) - x_k(t)|\,,\, t \in [\tau, \tau + \lambda]\} &\leq L\,|t - \tau|\, \max\{|x_k(t) - x_{k-1}(t)|\,,\, t \in [\tau, \tau + \lambda]\} \\ &\leq \frac{1}{2} \max\{|x_k(t) - x_{k-1}(t)|\,,\, t \in [\tau, \tau + \lambda]\}.\end{aligned}$$

A una desigualdad análoga se llega en el intervalo $[\tau - \lambda, \tau]$.

Llamemos ahora $m_k = \max\{|x_k(t) - x_{k-1}(t)|\,,\, t \in I_\lambda\}$. Tenemos entonces,

$$m_{k+1} \leq \frac{1}{2} m_k.$$

Iterando esta desigualdad, obtenemos

$$m_k \leq \frac{1}{2^{k-1}} m_1.$$

Finalmente, si $j = k + m$,

$$\begin{aligned}|x_k(t) - x_j(t)| = |x_k(t) - x_{k+m}(t)| &= |\sum_{i=0}^{m-1} (x_{k+i}(t) - x_{k+i+1}(t))| \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} m_{k+i+1} \leq m_1 \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2^{k+i}} = \frac{m_1}{2^k} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2^i} \leq \frac{m_1}{2^{k-1}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ si $j, k \geq k_0$ donde $\dfrac{m_1}{2^{k_0-1}} < \varepsilon$ se tiene para $t \in [\tau - \lambda, \tau + \lambda]$,

$$|x_j(t) - x_k(t)| < \varepsilon.$$

Claramente, de la demostración se ve que si τ es el extremo izquiedo de I y $\lambda \leq 1/2L$ es tal que $[\tau, \tau + \lambda] \subset I$, se tiene una solución en el intervalo $[\tau, \tau + \lambda]$.

Análogamente, si τ es el extremo derecho de I y $\lambda \leq 1/2L$ es tal que $[\tau - \lambda, \tau] \subset I$, se tiene una solución en el intervalo $[\tau - \lambda, \tau]$. □

Antes de discutir cuál es el mayor intervalo que contiene a τ donde hay definida una solución del problema, veamos un resultado de continuidad de las soluciones respecto del dato inicial que implicará la unicidad local de solución.

Teorema 2.3. *Sean I y f como en el Teorema 2.2. Sean $\tau \in I$ y $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$.*

Sean $x_1, x_2 : [\tau, \eta] \subset I \to \mathbb{R}$ soluciones de

$$x' = f(t, x) \qquad \text{en } [\tau, \eta], \tag{2.4}$$

con $x_i(\tau) = \xi_i$, $i = 1, 2$.

Existe una constante $C(\eta)$ dependiente de η tal que

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq C(\eta)\, |\xi_1 - \xi_2| \quad \text{para } t \in [\tau, \eta]. \tag{2.5}$$

Se tiene el mismo resultado si $x_1, x_2 : [\eta, \tau] \subset I \to \mathbb{R}$ son soluciones de

$$x' = f(t, x) \qquad \text{en } [\eta, \tau],$$

con $x_i(\tau) = \xi_i$, $i = 1, 2$.

Demostración. Lo demostraremos en el caso que $\eta > \tau$. La demostración del otro caso es enteramente análoga.

Sea L la constante de Lipschitz de f en $I \times \mathbb{R}$. Integrando la ecuación (2.4) para x_1 de τ a t, tenemos

$$x_1(t) = \xi_1 + \int_\tau^t f(s, x_1(s))\, ds.$$

Análogamente, integrando (2.4) para x_2 obtenemos

$$x_2(t) = \xi_2 + \int_\tau^t f(s, x_2(s))\, ds.$$

Restando ambas ecuaciones

$$x_1(t) - x_2(t) = \xi_1 - \xi_2 + \int_\tau^t [f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))]\, ds$$

y por lo tanto,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |\xi_1 - \xi_2| + L \int_\tau^t |x_1(s) - x_2(s)|\, ds. \tag{2.6}$$

Para obtener de (2.6) una desigualdad para $|x_1(t) - x_2(t)|$ usaremos el

Lema 2.1 (de Gronwall)**.** *Sea $g \ge 0$ continua en un intervalo que contiene a τ. Si*

$$g(t) \le A + B \left| \int_\tau^t g(s)\, ds \right|, \tag{2.7}$$

se sigue que

$$g(t) \le A e^{B|t-\tau|}.$$

Suponiendo probado el Lema de Gronwall, podemos aplicarlo con $g(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$ y obtenemos

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |\xi_1 - \xi_2| e^{L(t-\tau)} \le C(\eta)\, |\xi_1 - \xi_2| \quad \text{si } t \in [\tau, \eta].$$

donde $C(\eta) = e^{L(\eta-\tau)}$. □

Probemos ahora el Lema de Gronwall.

Demostración del Lema de Gronwall. Lo haremos en el caso $t \ge \tau$. La demostración en el otro caso es totalmente análoga.

Sea $G(t) = \displaystyle\int_\tau^t g(s)\, ds$. Entonces (2.7) nos dice que

$$G'(t) \le A + B\, G(t).$$

O, lo que es lo mismo,

$$G'(t) - B\, G(t) \le A.$$

Multipliquemos la inecuación por $e^{-B(t-\tau)}$. Tenemos

$$\big(e^{-B(t-\tau)}\, G(t)\big)' = e^{-B(t-\tau)}\big(G'(t) - B\, G(t)\big) \le A\, e^{-B(t-\tau)}.$$

Integrando de τ a t y usando que $G(\tau) = 0$, tenemos

$$e^{-B(t-\tau)}\, G(t) \le A \int_\tau^t e^{-B(s-\tau)}\, ds = -\frac{A}{B}\big(e^{-B(t-\tau)} - 1\big),$$

De aquí que

$$G(t) \leq \frac{A}{B}\big(e^{B(t-\tau)} - 1\big).$$

Como la desigualdad (2.7) dice que

$$g(t) \leq A + B\,G(t),$$

se sigue que

$$g(t) \leq A + B\frac{A}{B}\big(e^{B(t-\tau)} - 1\big) = Ae^{B(t-\tau)}.$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Como corolario del Teorema 2.3 se obtiene el resultado de unicidad local. A saber,

Teorema 2.4. *Sean I y f como en el Teorema 2.2. Sean $\tau \in I$ y $\xi \in \mathbb{R}$. Sean $\tau \in J_1 \subset I$, $\tau \in J_2 \subset I$ y $x_i : J_i \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2$ tales que*

$$\begin{aligned} &x_i' = f(t, x_i) \quad \text{en } J_i,\\ &x_i(\tau) = \xi. \end{aligned}$$

Entonces, $x_1(t) = x_2(t)$ si $t \in J_1 \cap J_2$.

Demostración. Sea $\tau \in [t_1, t_2] \subset J_1 \cap J_2$. Probaremos que $x_1 = x_2$ en $[t_1, t_2]$. Como el intervalo es arbitrario, se sigue que $x_1 = x_2$ en $J_1 \cap J_2$.

Probamos primero que $x_1 = x_2$ en $[\tau, t_2]$. (Podríamos tener $\tau = t_1$ y no habría que probar nada más). En efecto, por el Teorema 2.3 tenemos

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq C(t_2)\,|\xi - \xi| = 0 \quad \text{en } [\tau, t_2].$$

Análogamente,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq C(t_1)\,|\xi - \xi| = 0 \quad \text{en } [t_1, \tau].$$

El teorema está demostrado. □

Observación 2.4. Estos resultados de continuidad respecto de los datos iniciales y de unicidad son válidos bajo las condiciones del Teorema 2.1. Pero no daremos sus demostraciones aquí aunque son enteramente similares a las demostraciones de los Teoremas 2.3 y 2.4.

Observación 2.5 (Prolongación de soluciones). A partir del Teorema 2.4 vemos que si tenemos una solución x_1 del problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{2.8}$$

en un intervalo $\tau \in J_1 \subset I$ y una solución x_2 del problema (2.8) en $\tau \in J_2 \subset I$, tenemos en realidad una solución $\bar{x}$ de (2.8) en $J_1 \cup J_2$. En efecto, si definimos

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{si } t \in J_1, \\ x_2(t) & \text{si } t \in J_2, \end{cases}$$

se tiene que $\bar{x}$ está bien definida en $J_1 \cup J_2$ y es solución de (2.8) ahí.

Podemos por lo tanto definir la *solución maximal* de (2.8). A saber, sea $\tau \in \mathcal{J} \subset I$ el mayor intervalo donde hay definida una solución, es decir

$$\mathcal{J} = \cup\{J \,:\, \tau \in J \text{ y } J \text{ es un intervalo en el que hay definida una solución de (2.8)}\}.$$

Entonces hay una solución definida en $\mathcal{J}$, esta solución es única y no es posible prolongarla a un intervalo más grande que $\mathcal{J}$. Esta es la llamada *solución maximal*.

Observación 2.6. Supongamos que $f(t,x)$ es Lipschitz en la variable x en $[t_1,t_2] \times \mathbb{R}$ para todo intervalo cerrado y acotado $[t_1,t_2]$ contenido en I. Veamos que la solución maximal está definida en todo I.

En efecto, sea $\tau \in [t_1,t_2] \subset I$. Aplicando el Teorema 2.2 con I reemplazado por el intervalo $[\tau,t_2]$, la construcción nos da una solución en todo $[\tau,t_2]$ si $t_2-\tau \le 1/2L$. Si no, obtenemos una solución x_1 en $[\tau,\tau+1/2L]$. Consideremos ahora, para $\tau_1 = \tau+1/2L$ el problema

$$\begin{cases} x' = f(t,x) & \text{en } [\tau_1,\tau_1+\lambda], \\ x(\tau_1) = x_1(\tau_1). \end{cases}$$

Por el Teorema 2.2, si $t_2-\tau_1 \le 1/2L$, existe una solución x_2 en $[\tau_1,t_2]$. Esta solución se pega bien con x_1 en τ_1 y por lo tanto obtenemos una solución en $[\tau,t_2]$.

Si por el contrario, $t_2-\tau_1 > 1/2L$, existe una solución x_2 en $[\tau_1,\tau_1+1/2L]$, y por lo tanto tenemos una solución en $[\tau,\tau+2\,\frac{1}{2L}]$.

Siguiendo así, como existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\tau+k\,\frac{1}{2L} > t_2$, vemos que en un número finito de pasos debemos tener una solución definida en todo $[\tau,t_2]$.

Análogamente se ve que hay una solución definida en $[t_1,\tau]$.

Por lo tanto, hay una solución definida en $[t_1,t_2]$. De donde, la solución maximal está definida ahí. Como el intervalo $\tau \in [t_1,t_2] \subset I$ es arbitrario, se sigue que la solución maximal está definida en todo I.

Observación 2.7. Cuando la solución maximal está definida en todo I, decimos que la solución es *global*. Por la Observación 2.6, vemos que bajo las condiciones del Teorema 2.2, la solución maximal es global. Este resultado también es cierto si, en el Teorema 2.2, en lugar de una función $f(t,x)$ tenemos un campo $F(t,X)$ Lipschitz en la variable X en $J \times \mathbb{R}^n$ para todo intervalo cerrado y acotado $J \subset I$. Es decir, el resultado de existencia global es válido para sistemas de n ecuaciones con n incógnitas de la forma

$$X' = F(t,X)$$

si F es Lipschitz en la variable X en $J \times \mathbb{R}^n$ para todo intervalo cerrado y acotado $J \subset I$.

En particular, las soluciones de un sistema lineal con coeficientes continuos en un intervalo abierto I son globales, tanto en el caso homogéneo como no homogéneo. Enunciaremos este resultado para referencia posterior.

Teorema 2.5. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto (posiblemente todo $\mathbb{R}$). Sean $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ funciones continuas en I para $i, j = 1, \cdots, n$. Sean $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Existe entonces una única solución $X = (x_1, \cdots, x_n)$ de*

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2, \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n, \end{cases} \tag{2.9}$$

que satisface $X(\tau) = \xi$. Esta solución está definida en todo el intervalo I.

Observación 2.8. La condición de Lipschitcianidad global no puede relajarse a Lipschitcianidad local. En efecto, como vimos en la introducción, la solución del problema

$$x' = x^2$$
$$x(0) = 1$$

es $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$. Por lo tanto, el intervalo maximal de existencia para este problema es $(-\infty, 1)$, mientras que $I = \mathbb{R}$; ya que, en este ejemplo, $f(t, x) = x^2$ es localmente Lipschitz en la variable x en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (pero no lo es globalmente).

3. Sistemas lineales de 1er. orden y ecuaciones lineales de orden n

En este capítulo estudiaremos el conjunto de soluciones de sistemas lineales de n ecuaciones con n incógnitas. Probaremos, en el caso homogéneo, que el conjunto de soluciones es un espacio vectorial lo que nos dice cómo será la solución general. Dada la relación entre ecuaciones de orden n y sistemas de n ecuaciones, deduciremos resultados análogos para el caso de ecuaciones. Finalmente, daremos un método para encontrar la solución general de sistemas (resp. ecuaciones) no homogéneas a partir de la solución general del sistema (resp. ecuación) homogéneo asociado.

3.1. **Generalidades y sistemas homogéneos.** Empecemos probando que el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo forma un espacio vectorial de dimensión n.

Teorema 3.1. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Sean $a_{ij}(t)$ funciones continuas en I. Sea $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. El conjunto de las soluciones del sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas*

$$X' = A(t)X \tag{3.1}$$

es un espacio vectorial de dimensión n.

Demostración. Recordemos que todas las soluciones están definidas en todo el intervalo I. Por lo tanto, podemos sumarlas y multiplicarlas por escalares. Lo que tenemos que ver, para ver que es un espacio vectorial, es que al sumar dos soluciones obtenemos otra solución y lo mismo sucede si multiplicamos una solución por un escalar. Esto es consecuencia de la linealidad de la operación de derivación y de la función $A(t)X$ (en la variable X). En efecto, sean X_1 y X_2 dos soluciones y $X = X_1 + X_2$ es decir, X es la función de I en $\mathbb{R}^n$ definida por $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$ para cada $t \in I$. Veamos que X es también solución de (3.1). Tenemos,

$$X'(t) = X_1'(t) + X_2'(t) = A(t)X_1(t) + A(t)X_2(t) = A(t)(X_1(t) + X_2(t)) = A(t)X(t).$$

Por lo tanto X satisface (3.1).

Sea ahora $c \in \mathbb{R}$ y sea $X = c\,X_1$, entonces

$$X'(t) = cX_1'(t) = cA(t)X_1(t) = A(t)(cX_1(t)) = A(t)X(t).$$

y nuevamente obtenemos que X es solución de (3.1).

Veamos ahora que hay una base del espacio de soluciones formada por exactamente n soluciones. Para esto, aplicamos el Teorema 2.5 con $\tau \in I$ cualquiera fijo. Sean X_i, $i = 1, \dots, n$, las soluciones maximales de (3.1) que verifican $X_i(\tau) = e_i$, donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Obtenemos así n soluciones. Veamos que son linealmente independientes, ésto es, que la única manera de obtener la función 0 al hacer una combinación lineal de estas soluciones es tomando todos los coeficientes iguales a 0.

Supongamos entonces que tenemos constantes $c_1, \dots, c_n$ tales que

$$c_1X_1(t) + \cdots + c_nX_n(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in I. \tag{3.2}$$

Debemos probar que necesariamente $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. En efecto, tomando $t = \tau$ en (3.2) obtenemos

$$c_1e_1 + \cdots + c_ne_n = 0.$$

Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ son linealmente independientes, se sigue que necesariamente $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ como queríamos demostrar.

Resta ver que $\{X_1, \dots, X_n\}$ generan el espacio de soluciones de (3.1). Es decir, que toda solución puede escribirse como combinación lineal de estas n soluciones. En efecto, sea X una solución de (3.1) y sea $\xi = X(\tau)$. Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, existen constantes $c_1, \dots, c_n$ tales que

$$\xi = c_1e_1 + \cdots + c_ne_n.$$

Construyamos ahora la siguiente función: $Y(t) = c_1X_1(t) + \cdots + c_nX_n(t)$ para $t \in I$. Entonces, como el conjunto de soluciones de (3.1) es un espacio vectorial, se sigue que Y es también una solución de (3.1). Pero, por la elección de las constantes $c_1, \cdots, c_n$, se tiene que $Y(\tau) = \xi$. De modo que tenemos dos soluciones de (3.1) con el mismo dato inicial ξ en $t = \tau$. Por el teorema de unicidad de solución se sigue que $X = Y$. Recordando quién es Y vemos que

$$X(t) = c_1X_1(t) + \cdots + c_nX_n(t) \quad \text{para todo } t \in I,$$

como queríamos demostrar. □

Un resultado importante, del cuál esencialmente ya probamos una parte en el teorema anterior es el siguiente

Proposición 3.1. *Sean $\{X_1, \dots, X_n\}$ soluciones de (3.1) y sea $\tau \in I$ cualquiera. Entonces $\{X_1, \dots, X_n\}$ son linealmente independientes como funciones de t en I si y sólo si los vectores $\{X_1(\tau), \dots, X_n(\tau)\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Como en la demostración del Teorema 3.1 supongamos que los vectores $\{X_1(\tau), \dots, X_n(\tau)\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.

Veamos que las funciones $\{X_1, \dots, X_n\}$ son linealmente independientes. En efecto, si $c_1, \dots, c_n$ son constantes tales que la función $c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t)$ es la función 0, veamos que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. En efecto, evaluando en $t = \tau$ vemos que

$$c_1 X_1(\tau) + \cdots + c_n X_n(\tau) = 0$$

y como $\{X_1(\tau), \dots, X_n(\tau)\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$, se sigue que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Recíprocamente, supongamos que las soluciones $\{X_1, \dots, X_n\}$ son linealmente independientes y veamos que los vectores $\{X_1(\tau), \dots, X_n(\tau)\}$ también lo son. En efecto, supongamos que

$$c_1 X_1(\tau) + \cdots + c_n X_n(\tau) = 0.$$

Sea $Y(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t)$ para $t \in I$. Entonces, Y es una solución de (3.1) con dato inicial $Y(\tau) = 0$. Por el teorema de unicidad de solución se sigue que $Y = 0$. Esto es,

$$c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in I.$$

Como las funciones $\{X_1, \dots, X_n\}$ son linealmente independientes obtenemos que necesariamente $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ como queríamos demostrar. □

Tenemos inmediatamente el siguiente corolario

Corolario 3.1. *Sean $\{X_1, \dots, X_n\}$ soluciones de (3.1) y sea $\tau, \eta \in I$ cualesquiera. Entonces los vectores $\{X_1(\tau), \dots, X_n(\tau)\}$ son linealmente independientes si y sólo si los vectores $\{X_1(\eta), \dots, X_n(\eta)\}$ lo son.*

Observación 3.1. Sea $\{X_1, \dots, X_n\}$ una base de soluciones de (3.1). Construyamos una matriz ubicando a estos vectores como columnas y llamémosla $Q(t)$. A una matriz de este tipo la llamamos *matriz fundamental*. Es fácil ver que

$$Q'(t) = A(t)Q(t) \quad \text{para todo } t \in I.$$

ya que las columnas de $A(t)Q(t)$ son los vectores $A(t)X_j(t)$.

Como el determinante de una matriz es no nulo si y sólo si sus columnas son linealmente independientes, el Corolario 3.1 dice que

$$\det Q(\tau) \neq 0 \text{ para un } \tau \in I \text{ si y sólo si } \det Q(t) \neq 0 \ \text{ para todo } t \in I.$$

Observemos además que como toda solución de (3.1) es combinación lineal de las columnas de Q, se sigue que toda solución es de la forma

$$X(t) = Q(t)C \quad \text{para algún vector} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Observemos por otro lado, que dada una matriz $U(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cualquiera (es decir, si no pedimos que las columnas sean solución de un mismo sistema lineal homogéneo), no tiene por qué ser cierto que el determinante es distinto de cero en un punto si y sólo si lo es en todos los puntos. Por ejemplo, si

$$U(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

se tiene que $\det U(0) = 0$ y $\det U(1) = 1$,

A partir de los resultados anteriores sobre el conjunto de soluciones de sistemas lineales, y dada la equivalencia de una ecuación de orden n con un sistema de primer orden de n ecuaciones con n incógnitas, obtenemos resultados sobre el conjunto de soluciones de una ecuación lineal de orden n. En efecto,

Consideremos la ecuación

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t). \tag{3.3}$$

Como vimos en la introducción, si x es solución de (3.3) se sigue que $X = (x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$ es solución del sistema

$$\begin{cases} x_0' = x_1, \\ x_1' = x_2, \\ \vdots \\ x_{n-2}' = x_{n-1}, \\ x_{n-1}' = -a_0(t)x_0 - a_1(t)x_1 - \cdots - a_{n-1}(t)x_{n-1} + f(t). \end{cases} \tag{3.4}$$

Recíprocamente, sea $X = (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$ una solución de (3.4), entonces la función $x(t) = x_0(t)$ es solución de (3.3). En efecto, la primer ecuación del sistema (3.4) dice que $x_1 = x'$, la segunda dice que $x_2 = x_1' = x''$. La tercera dice que $x_3 = x_2' = x'''$. Y así hasta la penúltima que dice que $x_{n-1} = x_{n-2}' = x^{(n-1)}$. Finalmente, con esta información la última ecuación dice que

$$\begin{aligned} x^{(n)} = x_{n-1}' &= -a_0(t)x_0 - a_1(t)x_1 - \cdots - a_{n-1}(t)x_{n-1} + f(t) \\ &= -a_{n-1}(t)x^{(n-1)} - a_{n-2}(t)x^{(n-2)} - \cdots - a_1(t)x' - a_0(t)x + f(t). \end{aligned}$$

Es decir, x es solución de (3.3).

Se tiene, por lo tanto, el siguiente resultado

Teorema 3.2.

(1) *Sea I un intervalo abierto de la recta y sea $\tau \in I$. Sean $a_i(t)$, $i = 1, \dots, n-1$ y $f(t)$ funciones continuas en I. Para cada n-upla $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ existe una única solución de (3.3) que satisface*

$$x(\tau) = y_0,\ x'(\tau) = y_1,\ x''(\tau) = y_2,\ \cdots x^{(n-1)}(\tau) = y_{n-1}.$$

Además la solución está definida en todo el intervalo I.

(2) *Sea I un intervalo abierto de la recta y sean $a_i(t)$, $i = 1, \dots, n-1$ funciones continuas en I. El conjunto de soluciones de (3.3) cuando $f = 0$ – es decir en el caso de la ecuación lineal homogénea de orden n – es un espacio vectorial de dimensión n.*

(3) *Bajo las mismas hipótesis que en (2), un conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ de soluciones de (3.3) es linealmente independiente – y por ende una base de soluciones – si y sólo si*

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(\tau) := \det \begin{pmatrix} x_1(\tau) & x_2(\tau) & \cdots & x_n(\tau) \\ x_1'(\tau) & x_2'(\tau) & \cdots & x_n'(\tau) \\ x_1''(\tau) & x_2''(\tau) & \cdots & x_n''(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(\tau) & x_2^{(n-1)}(\tau) & \cdots & x_n^{(n-1)}(\tau) \end{pmatrix} \neq 0$$

$W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se llama el Wronskiano *de las soluciones $x_1, \dots, x_n$ y, dado un conjunto de soluciones de la ecuación lineal (3.3) en el caso homogéneo $f = 0$, se tiene que $W(x_1, x_2, \dots, x_n)(\tau) \neq 0$ para algún $\tau \in I$ si y sólo si $W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.*

Demostración. Probemos (1). Veamos primero la existencia de solución para cada n-upla de datos iniciales.

Sea $\xi = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ y sea $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ la solución de (3.4) con dato inicial $X(\tau) = \xi$. Como vimos antes, $x = x_0$ es solución de (3.3) y además $x' = x_1$, ,$x'' = x_2$, ,..., $x^{(n-1)} = x_{n-1}$. Por lo tanto, $x(\tau) = y_0$, $x'(\tau) = y_1$, ..., $x^{(n-1)}(\tau) = y_{n-1}$. Y por lo tanto existe solución, como queríamos demostrar.

Probemos ahora la unicidad de solución. En efecto, si x y $\tilde{x}$ son dos soluciones de (3.3) con los mismos datos iniciales en $t = \tau$, veamos que son iguales.

Sean $X = (x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$ y $\tilde{X} = (\tilde{x}, \tilde{x}', \tilde{x}'', \dots, \tilde{x}^{(n-1)})$. Entonces X y $\tilde{X}$ son soluciones de (3.4) y $X(\tau) = \tilde{X}(\tau)$. Por el teorema de unicidad de solución, se sigue que $X(t) = \tilde{X}(t)$ para todo $t \in I$. En particular, $x(t) = \tilde{x}(t)$ para todo $t \in I$, como afirmamos.

Probemos (2). Recordemos que en este caso $f = 0$. Por lo tanto se trata de una ecuación homogénea y el sistema lineal equivalente también es homogéneo. Es fácil ver que el conjunto de soluciones es un espacio vectorial.

Para ver que el espacio vectorial de soluciones tiene dimensión n, basta demostrar que hay n soluciones x^1, x^2, ..., x^n linealmente independientes tales que cualquier solución se expresa en la forma $x = c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$ para alguna elección de constantes c_1, ..., c_n. Veamos entonces que ésto es así.

Fijemos $\tau \in I$. Para cada $i = 1, \dots, n$, sea $X_i = (x_0^i, x_1^i, \dots, x_{n-1}^i)$ la solución de (3.4) con $X_i(\tau) = e_i$ donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sabemos que $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una base del conjunto de soluciones de (3.4).

Sea ahora x una solución de (3.3) y llamemos $X = (x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$. Como X es solución de (3.4), existen constantes $c_1, \dots, c_n$ tales que $X = c_1X_1 + \cdots + c_nX_n$, en particular

$$x = c_1x_0^1 + c_2x_0^2 + \cdots + c_nx_0^n.$$

con x_0^1, ..., x_0^n soluciones de (3.3).

Veamos que las soluciones $\{x_0^1, \dots, x_0^n\}$ son linealmente independientes. En efecto, si tuviéramos

$$x = c_1 x_0^1 + c_2 x_0^2 + \cdots + c_n x_0^n = 0,$$

tendríamos

$$\begin{aligned} x' &= c_1 (x_0^1)' + c_2 (x_0^2)' + \cdots + c_n (x_0^n)' = 0, \\ x'' &= c_1 (x_0^1)'' + c_2 (x_0^2)'' + \cdots + c_n (x_0^n)'' = 0, \\ &\vdots \\ x^{(n-1)} &= c_1 (x_0^1)^{(n-1)} + c_2 (x_0^2)^{(n-1)} + \cdots + c_n (x_0^n)^{(n-1)} = 0. \end{aligned}$$

Como el sistema (3.4) dice que $(x_0^i)^{(k)} = x_k^i$, se sigue que

$$X := (x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}) = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n = 0$$

y como $\{X_1, \dots, X_n\}$ son linealmente independientes,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Con lo cual hemos demostrado el punto (2).

Finalmente, probemos el punto (3). Sean $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ soluciones de (3.3). Veamos que son linealmente independientes si y sólo si $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ lo son, donde

$$X_i = (x_i, x_i', x_i'', \dots, x_i^{(n-1)}) \tag{3.5}$$

es solución del sistema equivalente (3.4). En efecto, supongamos que $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ son linealmente independientes, y que se tiene para ciertas constantes

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = 0$$

y veamos que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. En efecto, como en la demostración del punto (2), si llamamos $x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$ vemos, derivando sucesivamente, que

$$\begin{aligned} x' &= c_1 x_1' + c_2 x_2' + \cdots + c_n x_n' = 0, \\ &\vdots \\ x^{(n-1)} &= c_1 x_1^{(n-1)} + c_2 x_2^{(n-1)} + \cdots + c_n x_n^{(n-1)} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n = 0$. Como $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ son linealmente independientes, se sigue que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Supongamos ahora que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ son linealmente independientes, y que se tiene para ciertas constantes

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n = 0 \tag{3.6}$$

y veamos que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. En efecto, se sigue de (3.6), mirando la primer entrada del vector X, que

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = 0.$$

Como $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ son linealmente independientes, se sigue que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Ahora, recordemos que un conjunto de n soluciones de un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas es linealmente independiente si y sólo si, para la matriz $Q(t)$ cuyas columnas son las n soluciones del sistema, se tiene

$$\det Q(\tau) \neq 0 \quad \text{para algún } \tau \in I.$$

y que

$$\det Q(\tau) \neq 0 \text{ para algún } \tau \in I \text{ si y sólo si } \det Q(t) \neq 0 \text{ para todo } t \in I.$$

Como en nuestro caso, las soluciones $\{X_1, \dots, X_n\}$ del sistema (3.4) vienen dadas por (3.5), la matriz $Q(\tau)$ resulta

$$Q(\tau) = \begin{pmatrix} x_1(\tau) & x_2(\tau) & \cdots & x_n(\tau) \\ x_1'(\tau) & x_2'(\tau) & \cdots & x_n'(\tau) \\ x_1''(\tau) & x_2''(\tau) & \cdots & x_n''(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(\tau) & x_2^{(n-1)}(\tau) & \cdots & x_n^{(n-1)}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Por lo que $\det(Q(\tau)) = W(x_1, x_2, \dots, x_n)(\tau)$ y se tiene lo enunciado en el punto (3). □

3.2. **Sistemas no homogéneos.** Analizaremos ahora el caso de sistemas lineales no homogéneos y veremos un método – *el método de variación de parámetros o de constantes* – que nos permite hallar las soluciones de un sistema lineal no homogéneo si conocemos una base del conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado.

Teorema 3.3. *La solución general del sistema lineal (2.9) tiene la siguiente forma*

$$X(t) = X_p(t) + X_H(t) \tag{3.7}$$

donde X_p es una solución particular del sistema (2.9) y X_H es la solución general del sistema lineal homogéneo asociado, es decir, de (2.9) pero con $b_i = 0$.

Demostración. Sea X_p una solución particular de (2.9) y sea X otra solución. Sea $Y = X - X_p$. Entonces, si $A = (a_{ij})$ es la matriz asociada al sistema (2.9) se sigue que

$$Y' = X' - X_p' = A(t)X + b(t) - \big(A(t)X_p + b(t)\big) = A(t)(X - X_p) = A(t)Y.$$

Por lo tanto, Y es una solución del sistema homogéneo asociado. Es decir, una solución de

$$Y' = A(t)Y. \tag{3.8}$$

Sea ahora $X = X_p + Y$ donde Y es una solución de (3.8), entonces

$$X' = X_p' + Y' = A(t)X_p + b(t) + A(t)Y(t) = A(t)(X_p + Y) + b(t) = A(t)X + b(t).$$

Es decir, X es solución de (2.9). □

Veamos ahora el método de variación de constantes.

Teorema 3.4. *Sea $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ continua en un intervalo abierto I. Sea $\{X_1, \cdots, X_n\}$ una base del conjunto de soluciones de (3.8). Sea $b(t) \in \mathbb{R}^n$ continuo en I. Existen funciones $c_1(t), \cdots, c_n(t)$ continuamente diferenciables en I tales que*

$$X_p(t) = c_1(t)X_1(t) + \cdots + c_n(t)X_n(t)$$

es una solución particular del sistema $X' = A(t)X + b(t)$. Más precisamente, las funciones $c_i(t)$ son primitivas de las soluciones $c_i'(t)$ del sistema lineal de ecuaciones (para cada t)

$$Q(t)\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = b(t),$$

donde $Q(t)$ es la matriz formada por los vectores $X_j(t)$ puestos como columnas.

Demostración. Recordemos que en la observación 3.1 vimos que si tomamos la matriz $Q(t)$ cuyas columnas son los vectores $X_j(t)$ – llamada matriz fundamental – se tiene

$$Q'(t) = A(t)Q(t)$$

y la solución general del sistema (3.8) es

$$X_H(t) = Q(t)C,$$

donde C es un vector constante. (Esto es exactamente decir que $X_H(t) = c_1X_1(t)+\cdots+c_nX_n(t)$). Por lo tanto, lo que se está proponiendo es tomar

$$X_p(t) = Q(t)C(t),$$

donde ahora reemplazamos el vector constante C por un vector cuyas componentes son funciones continuamente diferenciables en I.

Para ver que de esta manera podemos hallar una solución de $X' = A(t)X + b(t)$, simplemente derivamos y vemos qué tiene que satisfacer $C(t)$. Por la regla de derivación del producto (que sigue valiendo en este caso de producto de una matriz por un vector),

$$\begin{aligned} X_p'(t) &= Q'(t)C(t) + Q(t)C'(t) = A(t)Q(t)C(t) + Q(t)C'(t) \\ &= A(t)X_p(t) + Q(t)C'(t) = A(t)X_p(t) + b(t), \end{aligned}$$

si

$$Q(t)C'(t) = b(t). \tag{3.9}$$

Recordemos que $\det Q(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ por ser una matriz fundamental (ver Observación 3.1). Podemos por lo tanto invertir la matriz $Q(t)$ y obtenemos

$$C'(t) = Q(t)^{-1}b(t). \tag{3.10}$$

De esta manera obtenemos funciones continuas – las componentes del vector $Q(t)^{-1}b(t)$ – que deberían ser las componentes del vector $C'(t)$ para que X_p sea una solución del sistema no homogéneo $X' = A(t)X + b(t)$.

Lo único que resta ahora para encontrar las funciones $c_i(t)$ (componentes del vector C) es integrar componente a componente (3.10) para obtener funciones continuamente diferenciables en I.

Observemos que al integrar uno tiene constantes de integración arbitrarias. Podemos simplemente tomarlas igual a 0 para obtener una solución particular. Si las dejamos en la expresión de las funciones $c_i(t)$ obtenemos directamente la solución general del sistema no homogéneo ya que el término adicional $Q(t)\bar{C}$ que obtenemos es la solución general del sistema homogéneo asociado. $\square$

Veremos ejemplos de aplicación de este método al final del capítulo siguiente donde aprenderemos a hallar la solución general de sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes. En la práctica lo que se hace es plantear (3.9) – que es, para cada t, un sistema lineal de ecuaciones con incógnitas $c_1'(t), \cdots, c_n'(t)$ –, resolver el sistema y finalmente integrar el resultado para obtener $c_1(t), \cdots, c_n(t)$.

Veamos ahora cómo se aplica el método de variación de parámetros para resolver ecuaciones lineales no homogéneas de orden n.

Consideremos la ecuación

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t) \tag{3.11}$$

y supongamos que tenemos una base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Tomemos las funciones $X_i(t) = (x_i, x_i', \ldots, x_i^{(n-1)})$. Sabemos que $\{X_1, \ldots, X_n\}$ es una base de soluciones del sistema lineal homogéneo de 1er. orden asociado al siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_0' &= x_1, \\ x_1' &= x_2, \\ &\vdots \\ x_{n-2}' &= x_{n-1}, \\ x_{n-1}' &= -a_0(t)x_0 - a_1(t)x_1 - \cdots - a_{n-1}(t)x_{n-1} + f(t). \end{aligned} \tag{3.12}$$

El sistema (3.12) es un sistema no homogéneo con no homogeneidad

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

El método de variación de parámetros para el sistema (3.12) dice que una solución particular tiene la forma

$$X_p(t) = c_1(t)X_1(t) + \cdots + c_n(t)X_n(t),$$

donde las funciones $c_1, \ldots, c_n$ son solución del sistema

$$Q(t) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Aquí la matriz $Q(t)$ tiene por columnas los vectores $X_j(t)$. Por lo tanto el sistema (3.13) es

$$\begin{aligned}
&c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) + \cdots + c_n'(t)x_n(t) = 0,\\
&c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) + \cdots + c_n'(t)x_n'(t) = 0,\\
&c_1'(t)x_1''(t) + c_2'(t)x_2''(t) + \cdots + c_n'(t)x_n''(t) = 0,\\
&\vdots\\
&c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Como la primer componente del vector $X_p(t)$ es una solución particular de (3.11) se sigue que si las derivadas de las funciones $c_1, \cdots, c_n$ satisfacen (3.14), la función

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t)$$

es solución de (3.11).

Tenemos por lo tanto el siguiente teorema

Teorema 3.5 (Método de variación de parámetros para una ecuación lineal no homogénea de orden n)**.** *La solución general de la ecuación (3.11) tiene la forma*

$$x(t) = x_p(t) + x_H(t),$$

donde x_p es una solución particular de (3.11) y x_H es la solución general de la ecuación homogénea asociada.

Una solución particular tiene la forma

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t),$$

donde las derivadas de las funciones $c_1, \ldots, c_n$ satisfacen el sistema (3.14) y $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es una base de soluciones de la ecuacioón homogénea asociada.

4. Resolución de sistemas lineales con coeficientes constantes

En este capítulo buscaremos soluciones de sistemas lineales con coeficientes constantes. En el caso de sistemas de 2×2 hallaremos la solución general. En dimensiones mayores, dejaremos indicada la idea de cómo son las soluciones. Comenzaremos por el caso homogéneo y después veremos cómo encontrar la solución general del no homogéneo a partir de la solución general del homogéneo.

En todo el capítulo estudiaremos el sistema

$$X' = AX, \tag{4.1}$$

donde $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es una matriz constante.

En el caso $n = 1$ ya sabemos cómo es la solución general. En efecto, el sistema (4.1) se reduce a

$$x' = ax$$

cuya solución general es $x(t) = ce^{at}$ con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria.

Motivados por el caso unidimensional, veamos si para sistemas hay soluciones de la forma

$$X(t) = \xi e^{\lambda t}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Calculemos:

$$X' = \xi \lambda e^{\lambda t}, \quad AX = (A\xi)e^{\lambda t}$$

de modo que $X' = AX$ si y sólo si $A\xi = \lambda\xi$.

Para tener solución no trivial quiero que $\xi \neq 0$. De modo que $X(t) = \xi e^{\lambda t}$ es solución no trivial de (4.1) si y sólo si λ es autovalor de A y ξ es un autovector asociado al autovalor λ.

De modo que si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A, es decir, si existen $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ linealmente independientes tales que

$$A\xi_i = \lambda_i \xi_i$$

para ciertos $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (en otras palabras, la matriz A es diagonalizable), se tiene una base de soluciones del sistema lineal homogéneo (4.1) formada por las funciones $X_i(t) = \xi_i e^{\lambda_i t}$.

Observemos que los λ_i no tienen por qué ser distintos para distintos i. Las soluciones $X_i = \xi_i e^{\lambda_i t}$ son linealmente independientes porque lo son en $t = 0$ ya que $X_i(0) = \xi_i$.

En este caso la solución general de (4.1) es

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} \xi_i$$

con $c_i \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

Un caso particular en donde estaremos en esta situación es si todos los autovalores de A son reales y distintos ya que autovectores correspondientes a autovalores distintos siempre son linealmente independientes. Pero, como dijimos antes, podríamos tener una base de autovectores aunque A no tenga todos los autovalores distintos.

Ejemplo 4.1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar las soluciones del sistema $X' = AX$.

Para hallar los autovalores debemos buscar los $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

tenga una solución no trivial. Para ésto es necesario y suficiente que

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Recordemos que $p(\lambda)$ se llama el *polinomio característico de la matriz* A ($p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$).

En este caso, $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - 4$. Por lo tanto, los autovalores son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$.

Busquemos ahora autovectores asociados a estos dos autovalores. Para $\lambda_1 = 3$, un autovector será solución de $(3I - A)\xi = 0$, es decir, tendrá componentes (x_1, x_2) tales que

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Es decir, $x_1 - x_2 = 0$. Por lo tanto, un autovector asociado a $\lambda_1 = 3$ es $\xi_1 = (1, 1)$ y tendremos la solución

$$X_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para el caso de $\lambda_2 = -1$ debemos resolver el sistema $(-I - A)\xi = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

que equivale a $x_1 + x_2 = 0$ y tiene por solución a $\xi_2 = (1, -1)$, y nos da la solución

$$X_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De aquí que la solución general es

$$X(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

En este ejemplo el sistema que queríamos resolver es:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2, \\ x_2' &= 2x_1 + x_2. \end{aligned}$$

De la fórmula (4.2) encontramos que la solución general en coordenadas x_1, x_2 es

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}, \\ x_2 &= c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t}, \end{aligned}$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias. □

En muchas situaciones ocurre que los autovalores de la matriz son números complejos (aunque la matriz sea real) y por ende, sus autovectores asociados pertenecen a $\mathbb{C}^n$. En esta situación conviene pensar que estamos trabajando en $\mathbb{C}^n$ en lugar de $\mathbb{R}^n$. Es decir, admitimos soluciones que tomen valores complejos. La ventaja es que cuando A tiene autovalores complejos, puede ser diagonalizable en $\mathbb{C}^n$ pero no lo será en $\mathbb{R}^n$. Para ver que podemos trabajar en $\mathbb{C}^n$ definamos la exponencial de un número complejo.

Definición 4.1. Sea $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, definimos

$$e^\lambda = e^\alpha(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta).$$

Es fácil ver que la exponencial así definida sigue satisfaciendo las propiedades de la exponencial real, por ejemplo, $e^{\lambda_1+\lambda_2} = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}$. Además se tiene

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\lambda t} =& \frac{d}{dt}\big(e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\operatorname{sen}\beta t)\big) = \alpha e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\operatorname{sen}\beta t) + e^{\alpha t}\beta(-\operatorname{sen}\beta t + i\cos\beta t)\\ &= e^{\alpha t}\big((\alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t) + i(\alpha\operatorname{sen}\beta t + \beta\cos\beta t)\big) = e^{\alpha t}\big((\alpha+i\beta)(\cos\beta t + i\operatorname{sen}\beta t)\big)\\ &= \lambda e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si hay una base de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de A, tendremos una base del conjunto de soluciones complejas del sistema $X' = AX$ construida como en el caso real.

Ejemplo 4.2. Hallar las soluciones de

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 - x_3,\\ x_2' &= x_1,\\ x_3' &= x_1 - x_2.\end{aligned}$$

En este caso

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Para hallar los autovalores planteamos

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 1\\ -1 & \lambda & 0\\ -1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},$$

con lo cual resulta $p(\lambda) = (\lambda-1)\lambda^2 - 1 + \lambda = (\lambda-1)\lambda^2 + (\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda^2+1)$ y los autovalores (las raices de $p(\lambda)$) son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ y $\lambda_3 = -i$. Por lo tanto, al ser los 3 distintos, hay una base de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de A y podremos encontrar una base de soluciones del sistema diferencial si admitimos que tomen valores complejos.

Empecemos por buscar autovectores asociados a los autovalores hallados.

Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = 0.$$

Es decir, $x_3 = 0$, $x_1 = x_2$. Una solución es $(1,1,0)$. Por lo tanto una solución del sistema es

$$X_1(t) = e^t\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = i$

$$\begin{pmatrix} i-1 & 0 & 1 \\ -1 & i & 0 \\ -1 & 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Es decir

$$\begin{aligned} (i-1)x_1 + x_3 &= 0, \\ -x_1 + ix_2 &= 0, \end{aligned}$$

ya que la tercer ecuación es combinación lineal de las 2 primeras. Una solución es $x_1 = i$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1 + i$ que nos da la solución compleja del sistema diferencial

$$X_2(t) = e^{it} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = (\cos t + i \operatorname{sen} t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t + i \cos t \\ \cos t + i \operatorname{sen} t \\ (\cos t - \operatorname{sen} t) + i(\cos t + \operatorname{sen} t) \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para el autovalor $\lambda_3 = -i$,

$$\begin{pmatrix} -i-1 & 0 & 1 \\ -1 & -i & 0 \\ -1 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Es decir

$$\begin{aligned} (-i-1)x_1 + x_3 &= 0, \\ -x_1 - ix_2 &= 0, \end{aligned}$$

que tiene por solución a $x_1 = -i$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1 - i$.

Antes de proseguir, observemos que el autovector

$$\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

asociado al autovalor $-i$ es el conjugado del autovector que hallamos asociado al autovalor i. Y el autovalor $-i$ es el conjugado del autovalor i. De modo, que la solución que estamos encontrando

$$X_3(t) = e^{-it} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix},$$

es la conjugada de $X_2(t)$ (Recordemos que t es real). Por lo tanto, si escribimos $X_2(t) = X_R(t) + iX_I(t)$ con X_R y X_I reales, tendremos que $X_3(t) = X_R(t) - iX_I(t)$.

Como

$$X_R = \frac{1}{2}(X_2 + X_3) \quad \text{y} \quad X_I = \frac{1}{2i}(X_2 - X_3),$$

se sigue que X_R y X_I son soluciones <u>reales</u>.

Es fácil ver en este ejemplo que $\{X_1, X_R, X_I\}$ son linealmente independientes y por lo tanto forman una base del espacio de soluciones reales del sistema diferencial. Enseguida veremos que éste es un hecho general y que (cuando A es real) siempre podemos encontrar una base de soluciones reales a partir de una base de soluciones complejas ya que éstas vendrán de a pares conjugados.

Para terminar de encontrar la solución general en este ejemplo observemos que

$$X_R(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \quad X_I(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la solución general real es

$$X(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

En coordenadas,

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^t - c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos t, \\ x_2 &= c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \operatorname{sen} t, \\ x_3 &= (c_2 + c_3) \cos t - (c_2 - c_3) \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

□

Veamos entonces que lo observado en el ejemplo 4.2 es un hecho general y que el mismo procedimiento se puede aplicar a toda matriz real A que posea un autovalor complejo.

En efecto, supongamos que $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$ es un autovalor de A y sea $\xi = w + iv$, con w y v vectores reales, un autovector asociado. Es decir,

$$A\xi = \lambda\xi.$$

Conjugando componente a componente, y como A es real, tenemos

$$A\bar{\xi} = \bar{\lambda}\bar{\xi}.$$

Es decir, $\bar{\lambda}$ es un autovalor de A asociado al autovector $\bar{\xi}$. Esto nos da dos soluciones complejas conjugadas, a saber

$$X_1(t) = e^{\lambda t}\xi \quad , \quad X_2(t) = e^{\bar{\lambda} t}\bar{\xi} = \bar{X}_1(t).$$

Como en el ejemplo 4.2, podemos realizar combinaciones lineales de $X_1 = X_R(t) + iX_I(t)$ y $X_2 = X_R(t) - iX_I(t)$ para obtener soluciones reales. Tenemos que

$$X_R(t) = \frac{1}{2}(X_1(t) + X_2(t)), \quad X_I(t) = \frac{1}{2i}(X_1(t) - X_2(t)),$$

son soluciones del sistema. Veamos que X_R y X_I son linealmente independientes (recordemos que X_1 y X_2 lo son porque son independientes en $t = 0$ al ser ξ y $\bar{\xi}$ autovectores correspondientes a autovalores distintos).

Veamos que la única combinación lineal de X_R y X_I que da la función 0 es aquella que tiene las dos constantes nulas. En efecto, si $c_1 X_R + c_2 X_I = 0$ se tiene

$$0 = \frac{c_1}{2}(X_1 + X_2) + \frac{c_2}{2i}(X_1 - X_2) = (\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2i})X_1 + (\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2i})X_2.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2i}c_2 = 0,$$
$$\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2i}c_2 = 0.$$

Es fácil ver que la única solución posible de este sistema para las constantes c_1, c_2 es $c_1 = c_2 = 0$.

De esta manera sabemos cómo encontrar una base de soluciones reales en el caso de dimensión 2 si los dos autovalores de la matriz A son distintos.

La misma idea funciona en más dimensiones. Los autovalores complejos vienen de a pares conjugados y si en una base de soluciones complejas reemplazamos un par de soluciones conjugadas por la parte real y la parte imaginaria de una de ellas, se sigue teniendo una base de soluciones. Esto es lo que hicimos en el ejemplo.

En dimensión 2 el único caso que nos queda por analizar es el de un autovalor real de multiplicidad 2. Sea λ este autovalor. Si hay una base de autovectores, estamos en el caso que sabemos resolver. Pero en realidad es un caso muy simple, ya que tendremos $A = \lambda I$ y por lo tanto es un sistema desacoplado

$$x_1' = \lambda x_1,$$
$$x_2' = \lambda x_2,$$

cuya solución general es $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$, $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$ con c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

Si no hay una base de autovectores, sólo tenemos una solución de la forma $X(t) = e^{\lambda t}\xi$. ¿Cómo encontrar otra solución linealmente independiente?

Para tratar de entender cuál puede ser la forma de la segunda solución del sistema, estudiemos primero el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.3. Hallar una base de soluciones del sistema

$$X' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} X$$

En este caso, la matriz tiene un sólo autovalor λ con autovector asociado $(0, 1)$ y no hay ningún otro autovector linealmente independiente. Con lo cual el método desarrollado hasta el momento no nos permite hallar todas las soluciones de la ecuación.

Sin embargo, en este ejemplo, el sistema se "desacopla" de la siguiente manera. La ecuación para x_1 es

$$x_1' = \lambda x_1,$$

con lo cual $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$. Ahora, la ecuación para x_2 resulta

$$x_2' = x_1 + \lambda x_2 = c_1 e^{\lambda t} + \lambda x_2,$$

que es una ecuación lineal no homogénea de orden 1. Es sencillo entonces hallar la forma general para x_2 y la misma es

$$x_2 = (c_1 t + c_2)e^{\lambda t}.$$

En síntesis, tenemos que la solución general de la ecuación es

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\, e^{\lambda t} \\ (c_1 t + c_2)\, e^{\lambda t} \end{pmatrix} = c_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 e^{\lambda t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Es decir la base de soluciones es

$$\left\{ e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\, e^{\lambda t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\}.$$

□

Volviendo al caso general de una matriz con un único autovalor y espacio de autovectores de dimensión 1, y basados en el ejemplo 4.3, buscamos una segunda solución en la forma

$$X(t) = e^{\lambda t}(\xi_1 t + \xi_2),$$

para ciertos vectores ξ_1, ξ_2. Derivando tenemos

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t}(\xi_1 t + \xi_2) + e^{\lambda t}\xi_1.$$

Por otro lado,

$$AX(t) = e^{\lambda t} A\xi_1 t + e^{\lambda t} A\xi_2.$$

Para que $X'(t) = AX(t)$ para todo t se debe tener

$$\begin{aligned} A\xi_1 &= \lambda\xi_1, \\ A\xi_2 &= \lambda\xi_2 + \xi_1. \end{aligned}$$

Como λ es autovalor de A podemos tomar como ξ_1 un autovector asociado y con ésto se satisface la primer ecuación. Elegido ξ_1, la segunda ecuación pasa a ser un sistema lineal no homogéneo con matriz del sistema $A - \lambda I$ singular.

Veamos que este sistema siempre tiene una solución. En efecto, sea η un vector tal que ξ_1 y η son linealmente independientes. Por lo tanto, $\{\eta, \xi_1\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Entonces, $A\eta = c_1\eta + c_2\xi_1$. De aquí que la matriz de A en la base $\{\eta, \xi_1\}$ es

$$A_{\{\eta,\xi_1\}} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Como λ es el único autovalor de A, el polinómio característico de A es $p(r) = (r - \lambda)^2$. Por lo tanto, $c_1 = \lambda$. Finalmente, tomamos $\xi_2 = \eta/c_2$ y tenemos

$$A\xi_2 = \frac{1}{c_2} A\eta = \frac{1}{c_2}(\lambda\eta + c_2\xi_1) = \lambda\xi_2 + \xi_1,$$

como queríamos.

Observemos que $c_2 \neq 0$, y por lo tanto podemos dividir por él, ya que si no fuera así se tendría que η sería también autovector y habría un base de autovectores, lo que habíamos supuesto que no pasaba.

Observación 4.1. Lo que hemos hecho es hallar una base de Jordan de la matriz A.

Ejemplo 4.4. Hallar una base de soluciones para el sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2, \\ x_2' = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

La matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

que tiene polinómio característico

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Por lo tanto A tiene un único autovalor $\lambda = 2$. Busquemos los autovectores. Debemos resolver el sistema

$$(2I - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Es decir, $x_1 + x_2 = 0$. Por lo tanto un autovector asociado es

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y tenemos la solución

$$X_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Como no hay una base de autovectores y el autovalor es doble, buscamos la otra solución de la forma $X_2(t) = e^{2t}(\xi_1 t + \xi_2)$ donde ξ_1 es el autovector encontrado y ξ_2 es solución de $A\xi_2 = 2\xi_2 + \xi_1$. Es decir, ξ_2 es solución de

$$(A - 2I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

es decir, $x_1 + x_2 = -1$. Por ejemplo, podemos tomar

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

con lo cual tenemos la solución

$$X_2(t) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

La solución general es entonces

$$X(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

En coordenadas ésto es,

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{2t}(c_1 + c_2 t), \\ x_2 &= -e^{2t}\big((c_1 + c_2) + c_2 t\big). \end{aligned}$$

□

Podemos aplicar esta misma idea en más dimensiones.

Ejemplo 4.5. Hallar una base de soluciones para el sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2, \\ x_2' = x_2 - x_3, \\ x_3' = x_2 + 3x_3. \end{cases}$$

La matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

que tiene polinómio característico $p(\lambda)$ igual a

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-3) + (\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

Por lo tanto los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, este último con multiplicidad 2. Busquemos los autovectores asociados a λ_1. Debemos resolver

$$(I - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

lo que equivale a $x_2 = x_3 = 0$. Por lo tanto un autovector es

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que da la solución

$$X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para el autovalor $\lambda_2 = 2$ debemos resolver

$$(2I - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

lo que equivale a $x_1 - x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$. Por lo tanto, no hay 2 autovectores linealmente independientes asociados a este autovalor doble. Un autovector es

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

que da la solución

$$X_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar otra solución linealmente independiente la buscamos de la forma

$$X_3(t) = e^{2t}(\xi_2 t + \xi_3),$$

donde ξ_2 es el autovector que hallamos y ξ_3 es solución de $(A - 2I)\xi_3 = \xi_2$, es decir solución de

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

lo que equivale a $-x_1 + x_2 = 1$, $x_2 + x_3 = -1$. Una solución es

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y obtenemos la solución

$$X_3(t) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

De este modo encontramos 3 soluciones linealmente independientes. La solución general es entonces

$$X(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

lo que en coordenadas da

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^t + (c_2 + c_3 t)e^{2t} \\ x_2 &= \big((c_2 + c_3) + c_3 t\big)e^{2t} \\ x_3 &= -\big((c_2 + 2c_3) + c_3 t\big)e^{2t} \end{aligned}$$

□

En el caso de sistemas de 2×2 ya hemos considerado todos los casos posibles. Pero en el caso de sistemas de 3×3 todavía podríamos tener un autovalor triple. En alguno de estos casos aún sabemos cómo resolver el sistema. Esto es así si hay 3 autovectores linealmente independientes o también si sólo hay dos autovectores linealmente independientes ya que este caso lo tratamos como arriba. Sin embargo, este caso es más complicado que el correspondiente en dimensión 2 o el del último ejemplo ya que el espacio de autovectores tiene dimensión 2 y no está claro cuál es el autovector que multiplica a t en la tercer solución.

Pero bien podría suceder que sólo podamos encontrar 1 autovector y todos los demás sean múltiplos de él. No vamos a discutir este caso, pero se ve que a medida que crece la dimensión son más los casos que pueden aparecer.

Para analizar el caso general en dimensión n necesitamos más álgebra lineal y más tiempo.

Veamos ahora cómo funciona el método de variación de constantes para resolver sistemas lineales no homogéneos.

Ejemplo 4.6. Hallar la solución general del siguiente sistema no homogéneo
$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + e^t, \\ x_2' = -2x_1 + x_2 + \dfrac{e^t}{\cos 2t}. \end{cases}$$

Según el método de variación de constantes tenemos que encontrar la solución general del homogéneo para después encontrar una solución particular. Buscamos entonces los autovalores de la matriz del sistema, es decir, las raíces del polinomio
$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 4.$$
Los autovalores son, entonces, $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$.

Busquemos un autovector asociado al autovalor λ_1. Esto es, resolvamos el sistema
$$\big((1 + 2i)I - A\big) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$
Esto es, $2ix_1 - 2x_2 = 0$ que tiene por solución al vector
$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$
y nos da la solución compleja
$$X_1 = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Vimos que una base de soluciones reales está formada por la parte real y la parte imaginaria de X_1. Por lo tanto, vamos a encontrarlas.
$$X_1(t) = e^t(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t + i \operatorname{sen} 2t \\ -\operatorname{sen} 2t + i \cos 2t \end{pmatrix}.$$
Por lo tanto
$$X_R(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}, \qquad X_I(t) = e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$
y la solución general del sistema homogéneo asociado es
$$X_H(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Ahora buscamos una solución particular del sistema no homogéneo de la forma
$$X_p(t) = c_1(t) e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2(t) e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Las funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$ las buscamos de modo que la función
$$C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix},$$
satisfaga – con $Q(t)$ la matriz cuyas columnas son las soluciones $X_R(t)$ y $X_I(t)$ –
$$Q(t) C'(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Es decir, $c_1'(t)$ y $c_2'(t)$ deben ser solución de

$$\begin{pmatrix} e^t\cos 2t & e^t\operatorname{sen} 2t \\ -e^t\operatorname{sen} 2t & e^t\cos 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t)\end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1/\cos 2t\end{pmatrix}.$$

Es decir, solución del sistema

$$\begin{aligned} e^t\cos 2t\, c_1' + e^t\operatorname{sen} 2t\, c_2' &= e^t, \\ -e^t\operatorname{sen} 2t\, c_1' + e^t\cos 2t\, c_2' &= \frac{e^t}{\cos 2t}. \end{aligned}$$

Multiplicando la primer ecuación por $\cos 2t$, la segunda por $\operatorname{sen} 2t$ y restando obtenemos

$$e^t(\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 2t)\, c_1'(t) = e^t\Big(\cos 2t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{\cos 2t}\Big).$$

Por lo tanto,

$$c_1'(t) = \cos 2t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{\cos 2t},$$

de donde, integrando, obtenemos

$$c_1(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\log(\cos 2t).$$

Por otro lado, multiplicando la primer ecuación por $\operatorname{sen} 2t$, la segunda por $\cos 2t$ y sumando obtenemos

$$e^t(\operatorname{sen}^2 2t + \cos^2 2t)\, c_2'(t) = e^t(\operatorname{sen} 2t + 1).$$

Por lo tanto,

$$c_2'(t) = \operatorname{sen} 2t + 1,$$

de donde, integrando, obtenemos

$$c_2(t) = -\frac{1}{2}\cos 2t + t.$$

Así obtenemos una solución particular, a saber

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Big(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\log(\cos 2t)\Big)e^t\begin{pmatrix}\cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t\end{pmatrix} + \Big(-\frac{1}{2}\cos 2t + t\Big)e^t\begin{pmatrix}\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t\end{pmatrix} \\ &= e^t\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos 2t\log(\cos 2t) \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\log(\cos 2t) + t\cos 2t\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, la solución general se obtiene como $X(t) = X_p(t) + X_H(t)$. Por lo tanto, la solución general es

$$\begin{aligned} X(t) &= \Big(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\log(\cos 2t) + c_1\Big)e^t\begin{pmatrix}\cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t\end{pmatrix} + \Big(-\frac{1}{2}\cos 2t + t + c_2\Big)e^t\begin{pmatrix}\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t\end{pmatrix} \\ &= e^t\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos 2t\log(\cos 2t) + c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\log(\cos 2t) + t\cos 2t - c_1\operatorname{sen} 2t + c_2\cos 2t\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir

$$x_1(t) = e^t\Big(\frac{1}{2}\cos 2t\log(\cos 2t) + c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t\Big),$$
$$x_2(t) = -e^t\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\log(\cos 2t) - t\cos 2t + c_1\operatorname{sen} 2t - c_2\cos 2t\Big).$$

□

5. Ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes

En este capítulo encontraremos la solución general de ecuaciones lineales con coeficientes constantes de orden n. Comenzaremos con el caso homogéneo.

Teniendo en cuenta la relación entre ecuaciones de orden n y sistemas de n ecuaciones con n incógnitas vemos que la expresión de la solución de la ecuación

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0. \tag{5.1}$$

dependerá de los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

El polinomio característico de esta matriz es el polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

que es el polinomio que se obtiene cuando se reemplaza en la ecuación diferencial (5.1) la derivación por la correspondiente potencia de λ. Llamaremos a este polinomio *el polinomio característico de la ecuación.*

Por lo tanto, la expresión de las soluciones dependerá de las raíces del polinomio característico de la ecuación.

Por lo que vimos para sistemas, si todas las raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son reales y distintas, la solución general tiene la forma

$$x(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_ne^{\lambda_n t},$$

pues ésta es la forma que tiene la primer componente de la solución general del sistema asociado.

Esto nos dice que $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$ es una base de soluciones.

La misma expresión tiene la solución general *compleja* si todas las raíces son distintas aunque algunas pueden ser complejas. Las raíces complejas del polinomio característico vienen de a pares conjugados. Por lo tanto, si $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$ es una raíz compleja, en la base compleja de soluciones aparecen dos soluciones conjugadas a saber

$$x(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}, \qquad \bar{x}(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}.$$

Podemos reemplazar este par por un par de soluciones reales, a saber, la parte real y la parte imaginaria de $x(t)$ ya que no perdemos la independencia lineal de las soluciones con este reemplazo (la justificación es la misma que para los sistemas).

Es decir, reemplazamos el par de soluciones complejas $e^{(\alpha+i\beta)t}$, $e^{(\alpha-i\beta)t}$ por el par de soluciones reales

$$Re(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t}\cos\beta t, \qquad Im(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t}\mathrm{sen}\,\beta t.$$

En el caso de ecuaciones de segundo orden, o bien se tiene dos raíces reales distintas, o bien dos raíces complejas conjugadas (y por lo tanto distintas), o bien una única raíz de multiplicidad 2. Este último es el único caso que resta analizar.

Como sugiere la resolución de los sistemas, en este caso la solución general es

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t},$$

donde λ es la única raíz del polinomio característico de la ecuación. Esto es así porque los autovalores de la matriz (5.2) son todos simples. Por lo tanto, $\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\}$ es una base de soluciones en este caso.

De modo que sabemos hallar una base de soluciones para cualquier ecuación de orden 2.

Después continuaremos con ecuaciones de orden superior. Veamos ahora algunos ejemplos

Ejemplo 5.1. Hallar las soluciones de la ecuación

$$x'' - 2x' + x = 0.$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

cuya única raíz es $\lambda = 1$.

Por lo tanto, la solución general es

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^t.$$

Ejemplo 5.2. Hallar las soluciones de la ecuación

$$x'' + x = 0.$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1,$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Por lo tanto tenemos el par de soluciones complejas conjugadas e^{it}, e^{-it}. Pero podemos reemplazarlas por un par de soluciones reales, la parte real y la parte imaginaria de e^{it} a saber $\cos t$, $\mathrm{sen}\, t$. Por lo tanto, la solución general en este caso es

$$x(t) = c_1\cos t + c_2\mathrm{sen}\, t.$$

$\square$

El caso general de la ecuación de orden n (5.1) escapa, por problemas de tiempo, a nuestras posibilidades en el curso. Sin embargo, para completitud de estas notas y para los alumnos interesados desarrollaremos este caso a continuación. El enfoque utilizado es independiente de los sistemas de orden n para los que, como dijimos, hace falta más conocimientos de Álgebra Lineal. Con este fin introduzcamos la noción de operador diferencial.

Primero definamos el operador de derivación D por la relación

$$Dx = x'.$$

El operador D se aplica a una función y da por resultado otra función. Este operador se puede componer para obtener derivadas de cualquier orden. A saber,

$$D^k x = D(D(D(\cdots(Dx)))) = x^{(k)}$$

Otro operador que a una función le hace corresponder otra es la multiplicación por una función (podría ser una constante). Y todavía otro operador es

$$aD^k x := a x^{(k)}$$

donde a es una función continua (posiblemente constante).

Dos operadores pueden sumarse para dar otro operador: Si O_1 y O_2 son dos operadores

$$(O_1 + O_2)x := O_1 x + O_2 x.$$

Es decir, el resultado es la suma de los resultados.

También pueden componerse para dar como resultado otro operador, a saber

$$O_1 O_2 x = O_1(O_2 x).$$

De este modo, la ecuación (5.1) puede verse de la siguiente manera:

$$Lx := \left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\right) x = 0.$$

Está claro de esta expresión lo que entendíamos cuando decíamos que el polinomio característico de la ecuación se obtiene al reemplazar derivaciones por potencias de λ.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son las raices (reales y complejas) del polinomio característico con multiplicidades $n_1, \dots, n_k$ respectivamente (con lo cual $n_1 + \cdots + n_k = n$), se sigue que

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}.$$

La misma factorización es válida para el operador L a saber

$$Lx = (D - \lambda_1)^{n_1}(D - \lambda_2)^{n_2} \cdots (D - \lambda_k)^{n_k} x.$$

Además los operadores $(D - \lambda_j)^{n_j}$ conmutan, es decir

$$(D - \lambda_j)^{n_j}(D - \lambda_i)^{n_i} x = (D - \lambda_i)^{n_i}(D - \lambda_j)^{n_j} x.$$

Por lo tanto si sabemos encontrar una base de soluciones de cada operador $(D - \lambda_j)^{n_j}$ tendremos n soluciones de la ecuación (5.1).

En efecto, si por ejemplo, $(D - \lambda_1)^{n_1} x = 0$, tendremos

$$Lx = (D - \lambda_1)^{n_1}(D - \lambda_2)^{n_2} \cdots (D - \lambda_k)^{n_k} x = (D - \lambda_2)^{n_2} \cdots (D - \lambda_k)^{n_k}\big((D - \lambda_1)^{n_1} x\big) = 0.$$

Además las n_j soluciones correspondientes a la raiz λ_j son linealmente independientes y se puede ver que las n son linealmente independientes.

Veamos entonces cómo es la solución general de una ecuación cuando el operador diferencial asociado es $(D-\lambda)^n$, es decir, cuando el polinomio característico es $p(r)=(r-\lambda)^n$.

Para ésto observemos que

$$(D-\lambda)(e^{\lambda t}y)=D(e^{\lambda t}y)-\lambda e^{\lambda t}y=\lambda e^{\lambda t}y+e^{\lambda t}y'-\lambda e^{\lambda t}y=e^{\lambda t}y'.$$

Iterando,

$$(D-\lambda)^2(e^{\lambda t}y)=(D-\lambda)\big((D-\lambda)(e^{\lambda t}y)\big)=(D-\lambda)\big(e^{\lambda t}y'\big)=e^{\lambda t}y''.$$

De modo que iterando llegamos a

$$(D-\lambda)^n(e^{\lambda t}y)=e^{\lambda t}y^{(n)}$$

Como cualquier función x puede escribirse como $x=e^{\lambda t}y$ (basta tomar $y=e^{-\lambda t}x$), se ve que

$$(D-\lambda)^n x=0 \quad \text{si y sólo si} \quad x=e^{\lambda t}y \text{ con } y^{(n)}=0.$$

Es decir, si y sólo si $x=e^{\lambda t}y$ con $y=c_1+c_2t+\cdots+c_{n-1}t^{n-1}$. En efecto,

$$0=y^{(n)}=D(y^{(n-1)}) \quad \text{si y sólo si} \quad y^{(n-1)}=k_n \text{ para una constante } k_n.$$

Integando obtenemos

$$y^{(n-2)}=k_nt+k_{n-1} \quad , \quad y^{(n-3)}=\frac{k_n}{2}t^2+k_{n-1}t+k_{n-2} \quad ,\ldots$$

y finalmente

$$y=\frac{k_n}{(n-1)!}t^{n-1}+\frac{k_{n-1}}{(n-2)!}t^{n-2}+\cdots+k_1t+k_0$$

y se tiene lo afirmado.

Por lo tanto la solución general de $(D-\lambda)^n x=0$ es $x(t)=e^{\lambda t}p_n(t)$ donde $p_n(t)$ es un polinomio de grado a lo sumo $n-1$.

Volviendo al operador general con polinomio característico

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k},$$

vemos que cualquier función de la forma

$$x(t)=p_{n_1}(t)e^{\lambda_1 t}+\cdots+p_{n_k}(t)e^{\lambda_k t} \tag{5.3}$$

con p_{n_j} polinomio de grado a lo sumo n_j-1 es solución de la ecuación (5.1).

Por lo tanto hemos encontrado n soluciones de (5.1),

$$\{e^{\lambda_1 t},te^{\lambda_1 t},t^2e^{\lambda_1 t},\ldots,t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t},\ldots,e^{\lambda_k t},te^{\lambda_k t},\ldots,t^{n_k-1}e^{\lambda_k t}\}, \tag{5.4}$$

que se puede ver que son linealmente independientes. De modo que (5.3) da la solución general de (5.1) y (5.4) es una base de soluciones.

Con ésto encontramos la solución general compleja. La solución general real se obtiene reemplazando en la base (5.4) los pares de soluciones conjugadas por parte real y parte imaginaria. Por ejemplo, si $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ con $\beta_j \neq 0$, tomamos en lugar de las $2n_j$ soluciones complejas

$$e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, t^2 e^{\lambda_j t}, \dots, t^{n_j-1} e^{\lambda_j t}, e^{\bar\lambda_j t}, te^{\bar\lambda_j t}, t^2 e^{\bar\lambda_j t}, \dots, t^{n_j-1} e^{\bar\lambda_j t},$$

las $2n_j$ soluciones reales

$$e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, e^{\alpha_j t}\operatorname{sen}\beta_j t, te^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, te^{\alpha_j t}\operatorname{sen}\beta_j t, \dots, t^{n_j-1}e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, t^{n_j-1}e^{\alpha_j t}\operatorname{sen}\beta_j t.$$

□

Ejemplo 5.3. Hallar las soluciones de la ecuación

$$x^{(5)} - x^{(4)} + 2x''' - 2x'' + x' - x = 0.$$

El polinomio característico de la ecuación es

$$p(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)^2,$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$, con multiplicidad 1 y $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ con multiplicidad 2. Por lo tanto una base de soluciones es

$$\{e^t, \cos t, \operatorname{sen} t, t\cos t, t\operatorname{sen} t\}.$$

y la solución general es

$$x(t) = c_1 e^t + (c_2 + c_3 t)\cos t + (c_4 + c_5 t)\operatorname{sen} t.$$

□

Utilicemos ahora el método de variación de parámetros para hallar la solución de una ecuación lineal no homogénea.

Ejemplo 5.4. Hallar las soluciones de la ecuación

$$x'' - 2x' + x = t.$$

Hallamos primero una base de soluciones de la ecuación homogénea asociada cuyo polinómio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Por lo tanto la única raíz es $\lambda = 1$ y una base de soluciones es

$$\{e^t, te^t\}.$$

Buscamos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma

$$x(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t$$

donde las derivadas de las funciones c_1, c_2 satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} c_1' e^t + c_2' te^t &= 0, \\ c_1' e^t + c_2'(e^t + te^t) &= t. \end{aligned}$$

De donde, $c_2' = te^{-t}$ y $c_1' = -c_2' t = -t^2 e^t$.

Integrando obtenemos

$$c_2 = \int te^{-t}\, dt = -te^{-t} + \int e^{-t}\, dt = -te^{-t} - e^{-t} = -(t+1)e^{-t}$$

y

$$c_1 = -\int t^2 e^{-t}\, dt = t^2 e^{-t} - 2\int te^{-t}\, dt = t^2 e^{-t} + 2(t+1)e^{-t}.$$

De modo que la solución general es

$$x(t) = (t^2 + 2t + 2) - (t+1)t + c_1 e^t + c_2 te^t = t + 2 + c_1 e^t + c_2 te^t.$$

□

6. Comportamiento asintótico de las soluciones

En los capítulos previos, hemos visto que bajo condiciones muy generales, una ecuación diferencial admite solución única y que dicha solución es continua con respecto a las condiciones iniciales.

Por otro lado, hemos estudiado varias situaciones en donde la solución puede ser calculada de manera explícita. Sin embargo, en la mayoría de los casos (por ejemplo si estamos estudiando un sistema de ecuaciones no lineal) esa solución, que existe, no puede ser calculada. De todas formas, es mucha la información que uno puede llegar a dar sobre la solución (sobre el comportamiento de la solución) aún sin conocer la fórmula de la misma y ese es el objetivo de este capítulo.

Por mayor simplicidad, y dado que en la mayoría de las aplicaciones sucede, de ahora en más vamos a suponer que el sistema de ecuaciones diferenciales bajo consideración es *autónomo*, es decir, consideraremos ecuaciones de la forma

$$X' = F(X) \tag{6.1}$$

donde $X : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo C^1.

En esta situación, es decir si la ecuación es autónoma, se tiene la siguiente propiedad que nos será de gran utilidad.

Proposición 6.1. *Sean $X_1 : I_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $X_2 : I_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dos soluciones maximales de* (6.1)*. Entonces se tiene*

$$\{X_1(t) \mid t \in I_1\} \cap \{X_2(t) \mid t \in I_2\} = \emptyset \qquad o \qquad \{X_1(t) \mid t \in I_1\} = \{X_2(t) \mid t \in I_2\}.$$

En otras palabras, lo que dice la proposición 6.1 es que dos trayectorias dadas, o bien son idénticas, o bien no se cruzan.

Demostración. Este hecho es una consecuencia de la unicidad de soluciones. Supongamos que existen $t_1 \in I_1$ y $t_2 \in I_2$ tales que $X_1(t_1) = X_2(t_2) = X_0$. Entonces, si definimos la función $\tilde{X}(t) = X_2(t - t_1 + t_2)$, las funciones X_1 y $\tilde{X}$ son soluciones de

$$\begin{cases} X' = F(X), \\ X(t_1) = X_0, \end{cases}$$

de donde, por la unicidad, concluimos que $X_1 \equiv \tilde{X}$.

Ahora la proposición queda demostrada, observando que $Im(X_2) = Im(\tilde{X})$. □

Otra propiedad importante de los sistemas autónomos, es que uno puede suponer siempre que las condiciones iniciales están dadas en el instante $t_0 = 0$. En efecto, si $X(t)$ es una solución de (6.1), razonando de manera similar a en la prueba de la Proposición 6.1, definimos $\bar{X}(t) = X(t + t_0)$. Luego si X verifica

$$\begin{cases} X' = F(X), \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

tenemos que $\tilde{X}$ verifica

$$\begin{cases} \tilde{X}' = F(\tilde{X}), \\ \tilde{X}(0) = X_0. \end{cases}$$

6.1. **Diagramas de fases.** Una forma muy habitual y gráfica de entender el comportamiento asintótico o *dinámico* de las soluciones de una ecuación de la forma (6.1) es a través del llamado *diagrama de fases*.

Según la Proposición 6.1, si tomamos dos soluciones distintas de la ecuación diferencial, eso determina trayectorias disjuntas en el "plano de fases" $\mathbb{R}^n$. Luego, el diagrama de fases consiste precisamente en graficar en $\mathbb{R}^n$ una colección de tales trayectorias y las mismas nos darán una idea general del comportamiento de todas las trayectorias del sistema. Esto lo hacemos fundamentalmente en el caso en que $n = 2$ ya que es el caso en el que podemos graficar bien.

La idea de esbozar el diagrama de fases es el poder predecir el comportamiento asintótico (para el tiempo tendiendo a infinito) de las soluciones dependiendo de donde se encuentran inicialmente. Dibujando "suficientes" trayectorias debería ser posible saber si las soluciones tienden a estabilizarse en un cierto punto, si oscilan (soluciones periódicas), si se vuelven infinitamente grandes, etc...

A veces se puede tener una idea de cómo será el diagrama de fases dibujando en "muchos" puntos del plano la flecha que corresponde al campo vectorial $F(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big)$. Recordemos que las curvas solución del sistema $X' = F(X)$ son las trayectorias del campo F, es decir, son curvas

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}$$

tales que el vector velocidad – tangente a la curva – en el punto (x_0, y_0), con $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, es el vector $\big(f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)\big)$.

Por lo tanto, si dibujamos muchos de estos vectores podremos tratar de adivinar cómo serán las trayectorias buscando curvas que al pasar por un punto pasen con tangente igual a la flecha que dibujamos en ese punto.

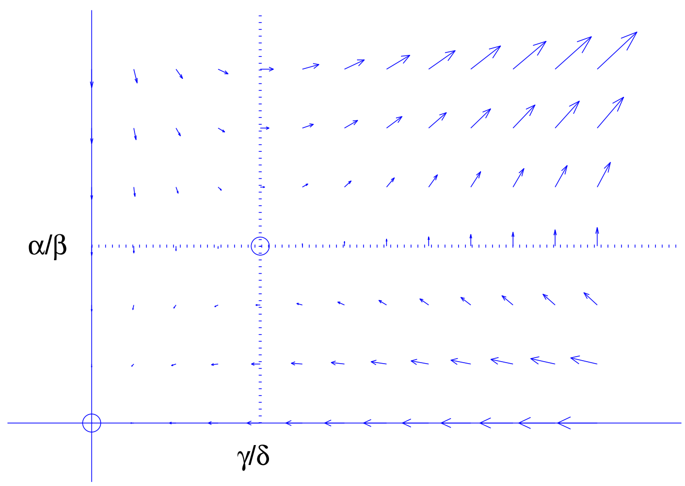
Veamos un ejemplo.

Ejemplo 6.1. Consideremos el siguiente modelo de dos poblaciones simbióticas,

$$\begin{cases} \dot{x} = (-\alpha + \beta y)\, x \\ \dot{y} = (-\gamma + \delta x)\, y \end{cases}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, que se obtiene al considerar dos poblaciones x e y que decrecen con razón de crecimiento constante en ausencia de la otra especie y cuya razón de crecimiento crece en forma proporcional a la otra población.

Cuando una trayectoria pasa por un punto con $y = \alpha/\beta$ lo hace en forma perpendicular a esa recta porque su vector velocidad $(0, (-\gamma + \delta x)\, y)$ es vertical. Cuando cruza la recta $x = \gamma/\delta$ lo hace en forma horizontal porque su vector velocidad es $((-\alpha + \beta y)\, x, 0)$. Las flechas que indican el campo $F(x, y) = \big((-\alpha + \beta y)\, x, (-\gamma + \delta x)\, y\big)$ en cada punto son aproximadamente así.



Cuando estamos cerca del $(0, 0)$ o del $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ las flechas son muy cortas. Esto indica que si estamos cerca de estos puntos pasaremos con velocidad muy chica y nos quedaremos cerca por mucho tiempo. El caso límite lo tenemos en estos puntos en los que no hay flecha. Lo que sucede es que el campo F se anula ahí. ¿Qué sucede si en algún instante t_0 estamos en un punto (x_0, y_0) donde $F = (f_1, f_2)$ se anula? Para contestar esta pregunta observemos que la función $x(t) \equiv x_0$, $y(t) \equiv y_0$ es solución de

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), & x(t_0) = x_0 \\ \dot{y} = f_2(x, y), & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Por unicidad de solución tendremos que ésta es la única solución que pasa por este punto. Pero esta es una solución constante a la que por lo tanto llamamos *Solución estacionaria*. Es fácil ver que las únicas soluciones estacionarias son las soluciones constantes igual a un valor (x_0, y_0) tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Esto se debe a que una solución constante tendrá derivada nula en todo tiempo y por lo tanto el campo F, que es igual a la derivada, debe anularse.

Tenemos entonces unos puntos especiales en el plano de fases, los ceros del campo F que corresponden a soluciones estacionarias, y vemos que cerca de esos puntos las trayectorias pasan muy despacio. Pero, ¿qué es lo que hacen? ¿Se acercan? ¿Se alejan? ¿Se quedan cerca sin acercarse?

Puede pasar cualquiera de estas cosas y es algo que uno trata de observar en el diagrama de fases.

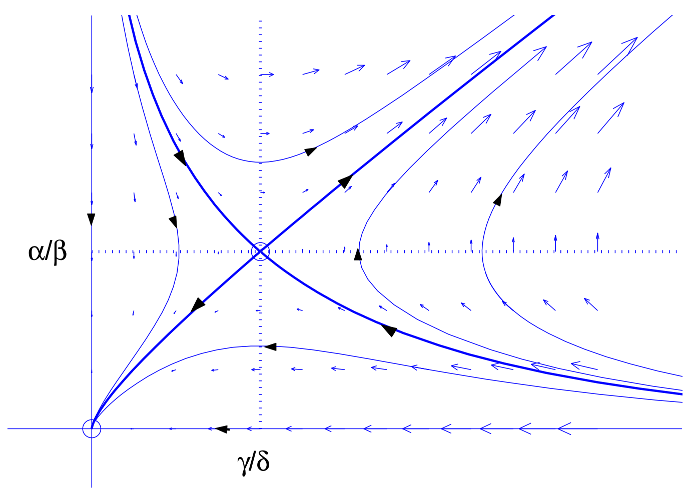
Otra cosa que observamos es que sobre los ejes coordenados, las flechas apuntan en la dirección del eje. Esto refleja el hecho de que si inicialmente estamos sobre uno de los ejes permaneceremos ahí por todo tiempo. En efecto, supongamos que inicialmente $y_0 = 0$. Sea $x(t)$ la solución de la ecuación

$$\dot{x} = -\alpha\, x$$

con $x(0) = x_0$. Entonces $X(t) = (x(t), 0)$ es la solución del sistema que inicialmente vale $(x_0, 0)$. Y análogamente con datos iniciales sobre el otro eje $x = 0$.

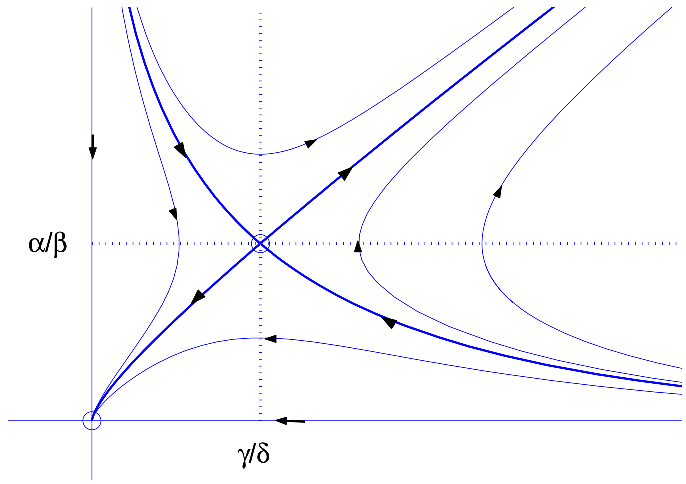
En particular, los semiejes corresponden a trayectorias y como las trayectorias no se cortan se sigue que las trayectorias que se inician en el primer cuadrante no salen de él. Esto dice que si inicialmente las dos poblaciones son positivas, lo serán para todo tiempo. Que $x(t)$ e $y(t)$ no se vuelvan negativas es importante para que el sistema refleje la realidad (son poblaciones). Pero lo que acabamos de observar es que ninguna población se extingue en tiempo finito.

Volvamos al ejemplo y tratemos de dibujar trayectorias correspondientes a este campo.



Da la impresión de que las trayectorias que comienzan cerca de $(0, 0)$ tienden a $(0, 0)$ cuando el tiempo tiende a $+\infty$ mientras que cerca del otro punto de equilibrio, el $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$, hay trayectorias que se acercan pero la mayoría parece alejarse.

Conjeturamos que el diagrama de fases para este sistema es



Pero, ¿cómo estar seguros de que es así? En este curso lo que vamos a poder asegurar es cómo es el diagrama de fases cerca de los puntos de equilibrio. El diagrama completo sólo lo podremos conjeturar. La razón es que cerca de la mayoría de los equilibrios los sistemas no lineales tienen diagramas de fase muy parecidos a los de un sistema lineal con coeficientes constantes. En este caso, como conocemos las fórmulas que nos dan las soluciones, podemos saber exactamente cómo es el diagrama de fases. Veremos ésto en detalle en la próxima sección. Pero antes veamos qué tipo de información podemos inferir del diagrama de fases.

Observamos que hay dos equilibrios. Uno es muy claro, si inicialmente no hay ningún miembro en ninguna de las dos poblaciones, ésto seguirá asi por siempre. Más aún, del diagrama de fases vemos que si alguna de las poblaciones es "chica", ambas poblaciones desaparecerán (en realidad no lo harán porque sólo se vuelven nulas cuando el tiempo se vuelve infinito, pero eventualmente ambas poblaciones serán extremadamente chicas.)

Hay otro equilibrio que es que la población x sea γ/δ y la población y sea α/β. Esta es una situación muy inestable. Vemos que sólo si hay una relación muy particular entre ambas poblaciones se acercarán al equilibrio. En cualquier otro caso, por más cerca que se encuentren del equilibrio se alejarán a medida que pase en tiempo. Más aún, hay poblaciones tan cercanas al equilibrio como se quiera que tenderán a desaparecer y otras que crecerán sin límite.

Demostremos ahora un lema que dice que sólo se llega a un punto de equilibrio (o punto crítico) en tiempo infinito.

Lema 6.1.

(1) *Si $X(t) \to X_0$ cuando $t \to t_0 \in \mathbb{R}$ y $X(t) \not\equiv X_0$, se sigue que $F(X_0) \neq 0$. Es decir, si una trayectoria tiende a un punto crítico lo hará en tiempo infinito (+ o - infinito).*

(2) *Si $X(t) \to X_0$ cuando $t \to +\infty$ se sigue que $F(X_0) = 0$. Análogamente con $t \to -\infty$. Es decir, si una trayectoria tiene un límite para tiempo tendiendo a infinito, ese límite debe ser un punto crítico.*

Demostración. Demostremos (1) Sabemos que si $F(X_0) = 0$, la única solución de $X' = F(X)$ que satisface $X(t_0) = X_0$ es la función idénticamente X_0. Como $X(t_0) = X_0$, se siguiría que $X(t) \equiv X_0$ lo que habíamos supuesto que no pasaba. Por lo tanto, $F(X_0) \neq 0$.

Ahora demostremos (2). Tenemos

$$X(t+1)-X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t+1)-x_1(t)\\ x_2(t+1)-x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1'(\sigma_1)\\ x_2'(\sigma_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\big(x_1(\sigma_1),x_2(\sigma_1)\big)\\ f_2\big(x_1(\sigma_2),x_2(\sigma_2)\big)\end{pmatrix}$$

donde $t<\sigma_i<t+1$, $i=1,2$ y el campo F tiene componentes (f_1,f_2).

Como $X'(t)=F(X(t))\to F(X_0)$ cuando $t\to+\infty$ se sigue que $X(t+1)-X(t)\to F(X_0)$ cuando $t\to+\infty$. Pero, $X(t+1)-X(t)\to X_0-X_0=0$. Por lo tanto, $F(X_0)=0$. $\square$

6.2. **Diagramas de fases de sistemas lineales a coeficientes constantes.** Consideremos el sistema

$$X'=AX$$

con $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ y $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$.

Queremos dibujar aproximadamente las trayectorias del sistema dependiendo de cómo son los autovalores λ_1 y λ_2 de A. Supongamos que 0 no es autovalor. En este caso $(0,0)$ es el único equilibrio del sistema.

Caso I. $\lambda_1>0>\lambda_2$.

Sean ξ_1 y ξ_2 los autovectores correspondientes a los λ_1 y λ_2 respectivamente. Entonces, la solución general es

$$X(t)=c_1e^{\lambda_1 t}\xi_1+c_2e^{\lambda_2 t}\xi_2.$$

Observemos que si $X(0)=c\xi_1$, es decir, si inicialmente estoy en la recta de autovectores asociados a λ_1, se sigue que $c_1=c$ y $c_2=0$. Por lo tanto, $X(t)=ce^{\lambda_1 t}\xi_1$ y en todo instante premanezco en esa recta. Además, como $\lambda_1>0$, se tiene que $X(t)\to\infty$ cuando $t\to+\infty$ y $X(t)\to 0$ cuando $t\to-\infty$.

Análogamente, si inicialmente estoy en la recta de autovectores asociados a λ_2 tengo $X(0)=c\xi_2$. Por lo tanto, $c_1=0$ y $c_2=c$ y tengo $X(t)=ce^{\lambda_2 t}\xi_2$. De donde en todo instante premanezco en esa recta. Además, como $\lambda_2<0$, se tiene que $X(t)\to\infty$ cuando $t\to-\infty$ y $X(t)\to 0$ cuando $t\to+\infty$.

Si inicialmente no estoy en ninguna de las dos rectas de autovectores, tanto c_1 como c_2 son no nulos. Llamemos $y_1(t)$ e $y_2(t)$ a los coeficientes del vector $X(t)$ en la base $\{\xi_1,\xi_2\}$. Es decir, escribamos

$$X(t)=y_1(t)\xi_1+y_2(t)\xi_2.$$

Por la forma que tiene la solución general vemos que $y_1(t)=c_1e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t)=c_2e^{\lambda_2 t}$ donde c_1 y c_2 con las componentes del vector $X(0)$ en la base $\{\xi_1,\xi_2\}$. Es decir, $X(0)=c_1\xi_1+c_2\xi_2$. Tenemos

$$\begin{array}{llll} y_1(t)\to+\infty, & (t\to+\infty) & y_1(t)\to 0, & (t\to-\infty),\\ y_2(t)\to 0, & (t\to+\infty) & y_2(t)\to+\infty, & (t\to-\infty). \end{array}$$

Por lo tanto, $X(t)$ se acerca más y más a la recta generada por ξ_1 cuando $t\to+\infty$ y a la recta generada por ξ_2 cuando $t\to-\infty$.

Este análisis ya permitiría intentar esbozar el diagrama de fases. Sin embargo será más sencillo hacer lo siguiente. Dibujemos primero las curvas $(y_1(t), y_2(t))$ que dicen cómo cambian los coeficientes de la solución en la base $\{\xi_1, \xi_2\}$. Una vez que tenemos claro este dibujo, observamos que

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

donde $Q = [\xi_1 \quad \xi_2]$ es la matriz cuyas columnas son los vectores ξ_1 y ξ_2.

Por lo tanto, el diagrama de fases en el plano (x_1, x_2) se obtiene del dibujo de las curvas $(y_1(t), y_2(t))$ en el plano (y_1, y_2) mediante una transformación lineal (de matriz Q).

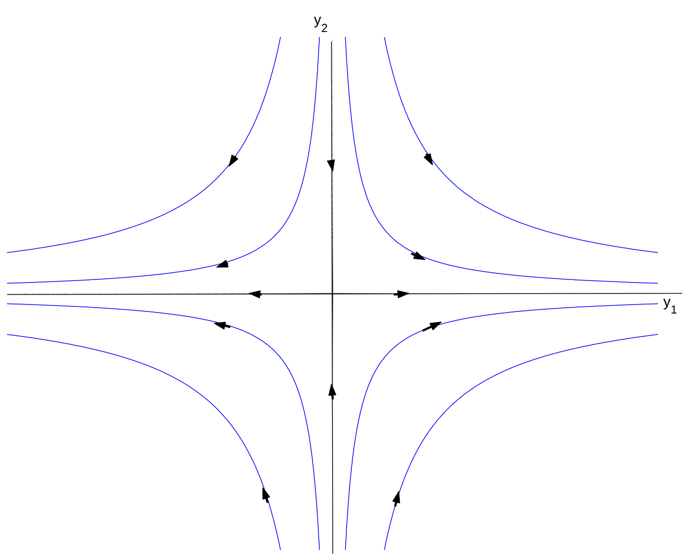
Sigamos entonces estas ideas y dibujemos primero las curvas $(y_1(t), y_2(t))$. Observemos que como $y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$ se sigue que

$$e^t = \left(\frac{y_1}{c_1}\right)^{1/\lambda_1}$$

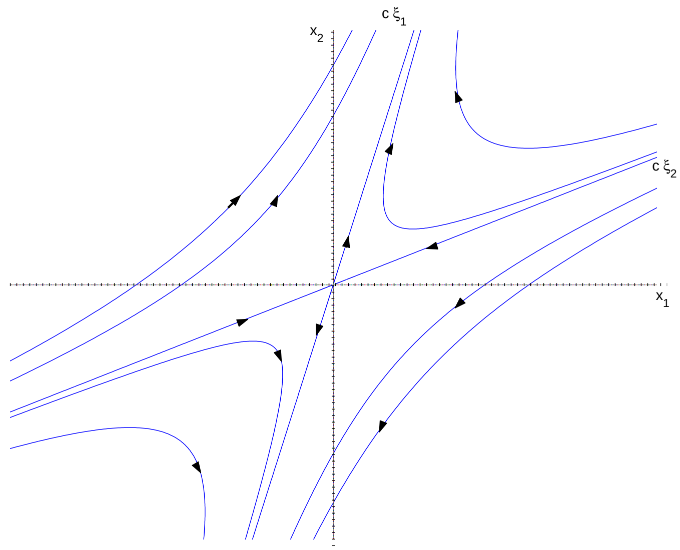
y

$$y_2(t) = c_2 \left(\frac{y_1}{c_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1} = k|y_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$$

Sea $\alpha = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$. Entonces $y_2 = k|y_1|^{\alpha}$ y el gráfico de las curvas $(y_1(t), y_2(t))$ es



y el diagrama de fases en el plano (x_1, x_2) es

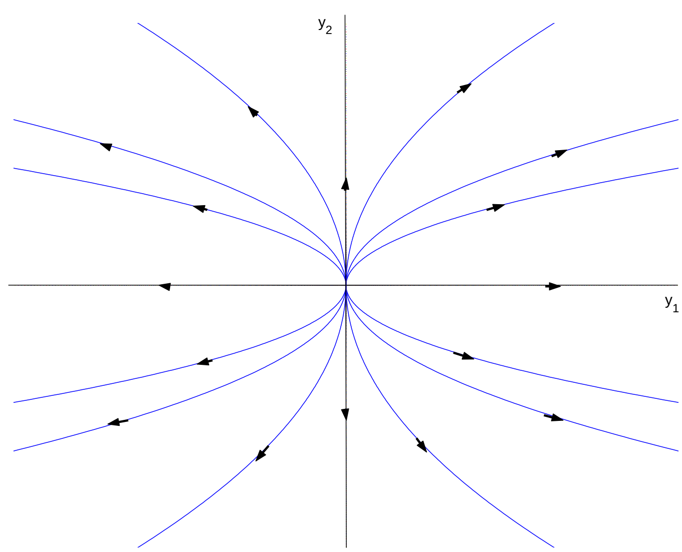


Caso II. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

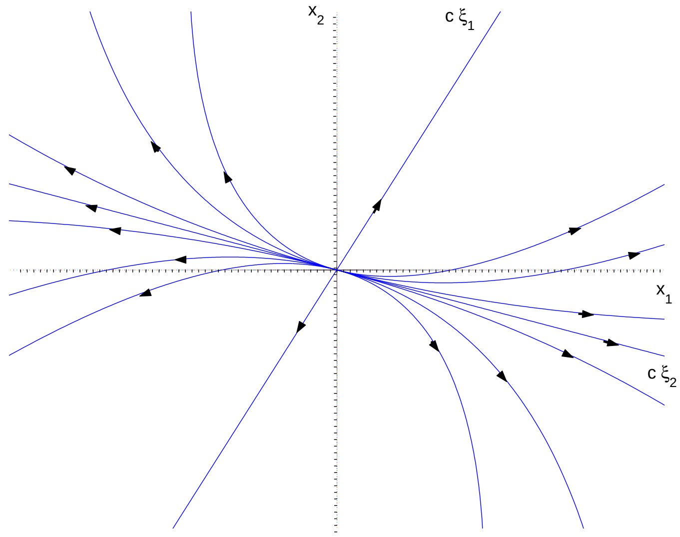
Como en el caso anterior tenemos $X(t) = y_1(t)\xi_1 + y_2(t)\xi_2$ donde ξ_1 y ξ_2 son autovectores correspondientes a los autovalores λ_1 y λ_2 respectivamente. Como antes se tiene

$$y_2 = k|y_1|^\alpha \qquad 0 < \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$$

Por lo tanto las curvas $(y_1(t), y_2(t))$ son



y el diagrama de fases será



Observemos que en este caso, dado el signo de λ_1 y λ_2 se tiene que $y_1(t), y_2(t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$ y $y_1(t), y_2(t) \to 0$ cuando $t \to -\infty$.

Caso III. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Este caso es exactamente como el anterior. Se tiene

$$y_2 = k|y_1|^\alpha \qquad 0 < \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$$

sólo que en este caso las flechas se invierten y los diagramas de curvas en el plano (y_1, y_2) y en el plano de fases es igual al Caso II con las flechas invertidas.

Caso IV. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Supongamos que $A \neq \lambda I$. El caso $A = \lambda I$ lo dejamos como ejercicio.

La solución general es $X(t) = c_1 e^{\lambda t}\xi_1 + c_2 e^{\lambda t}(\xi_1 t + \xi_2)$ donde ξ_1 es un autovector correspondiente al autovalor λ. Por lo tanto, $X(t) = y_1(t)\xi_1 + y_2(t)\xi_2$ con

$$y_1(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} \qquad\qquad y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

Observemos que $y_1(0) = c_1$, $y_2(0) = c_2$. Por lo tanto, si $X(0) = c\xi_1$ se sigue que $c_1 = c$ y $c_2 = 0$. Por lo tanto, $X(t) = c_1 e^{\lambda t}\xi_1$ y se ve que la recta generada por ξ_1 (la recta de autovectores asociados al único autovalor λ) es invariante. En este caso, la recta generada por ξ_2 no es invariante.

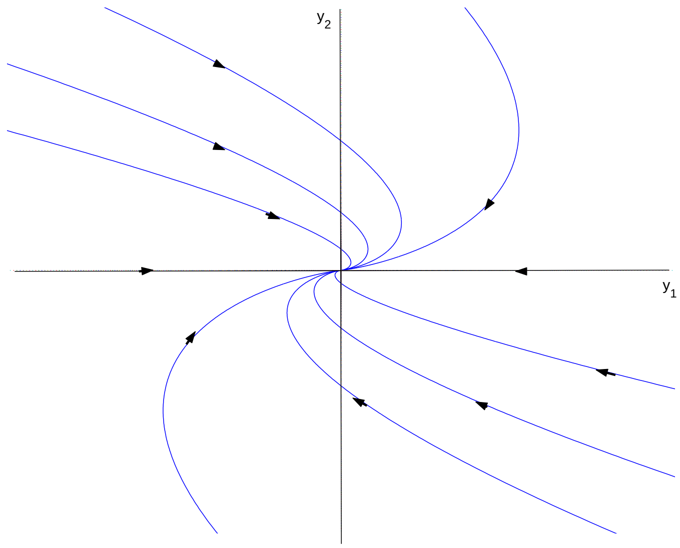
Tenemos

$$e^{\lambda t} = \frac{y_2}{c_2} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{\lambda}\log\Big|\frac{y_2}{c_2}\Big|.$$

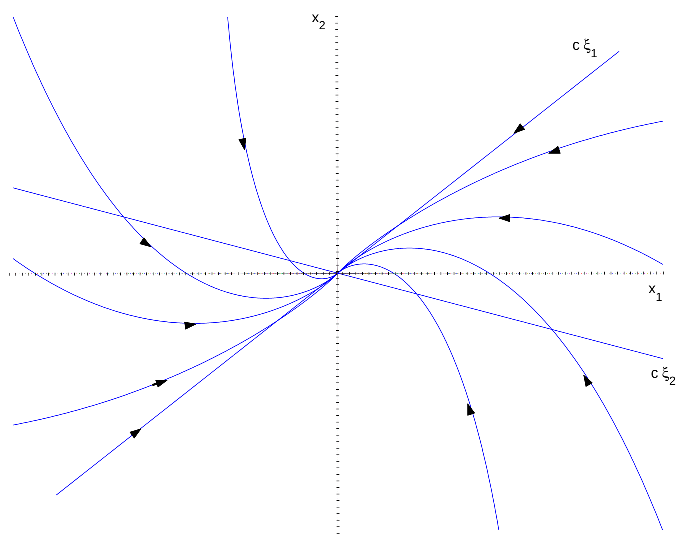
Por lo tanto,

$$y_1 = \frac{y_2}{c_2}\Big(c_1 + \frac{c_2}{\lambda}\log\Big|\frac{y_2}{c_2}\Big|\Big) = y_2\Big(k_1 + \frac{1}{\lambda}\log|y_2|\Big).$$

Además y_2 no cambia de signo pero como $\log|y_2|$ tiende a $-\infty$ cuando $|y_2|$ tiende a 0 y a $+\infty$ cuando $|y_2|$ tiende a $+\infty$ se ve que y_1 sí cambia de signo. Dibujemos las curvas $(y_1(t), y_2(t))$ en el caso en que $\lambda < 0$.



Lo que da como diagrama de fases



Caso V. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\beta < 0$.

En este caso la solución real es $X(t) = c_1 Re\big(e^{(\alpha+i\beta)t}\xi_1\big) + c_2 Im\big(e^{(\alpha+i\beta)t}\xi_1\big)$ donde $\xi_1 = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ es un autovector asociado a λ_1. Tenemos por lo tanto

$$X(t) = c_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t\, \mathbf{v}_1 - \operatorname{sen}\beta t\, \mathbf{v}_2) + c_2 e^{\alpha t}(\operatorname{sen}\beta t\, \mathbf{v}_1 + \cos\beta t\, \mathbf{v}_2).$$

Escrito en la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$,

$$X(t) = e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\operatorname{sen}\beta t)\mathbf{v}_1 + e^{\alpha t}(-c_1\operatorname{sen}\beta t + c_2\cos\beta t)\mathbf{v}_2 = y_1(t)\mathbf{v}_1 + y_2(t)\mathbf{v}_2.$$

Escribamos (c_1, c_2) en la forma

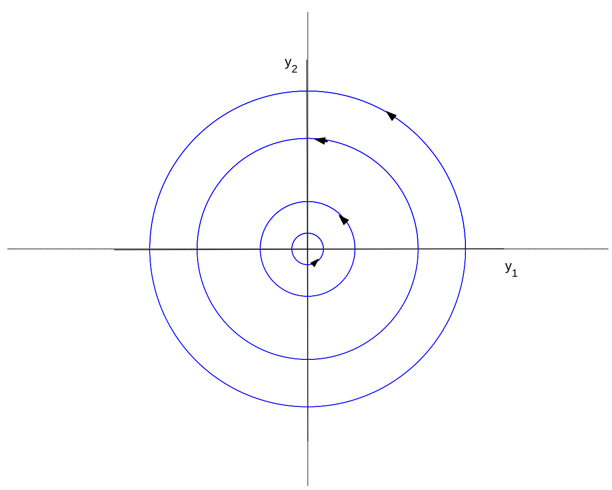
$$\begin{aligned} c_1 &= r\cos\theta \\ c_2 &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

y recordemos que $X(0) = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$, por lo tanto $y_1(0) = c_1$, $y_2(0) = c_2$. Tenemos

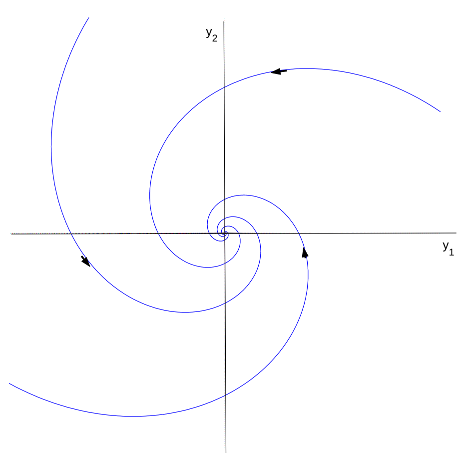
$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\alpha t} r(\cos\theta\cos\beta t + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\beta t) = e^{\alpha t} r\cos(\theta - \beta t) \\ y_2(t) &= e^{\alpha t} r(-\cos\theta\operatorname{sen}\beta t + \operatorname{sen}\theta\cos\beta t) = e^{\alpha t} r\operatorname{sen}(\theta - \beta t). \end{aligned}$$

Por lo tanto en el plano (y_1, y_2) la curva $(y_1(t), y_2(t))$ se obtiene rotando el punto (c_1, c_2) un ángulo $-\beta t > 0$ y luego expandiendo (o contrayendo) su módulo por un factor $e^{\alpha t}$. Esto da los siguientes diagramas dependiendo de α.

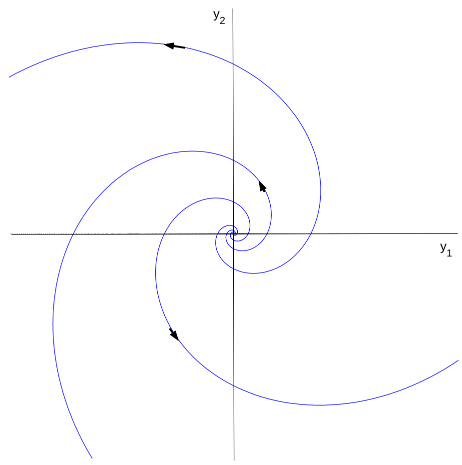
$\underline{\alpha = 0}$



$\underline{\alpha < 0}$



$\underline{\alpha > 0}$



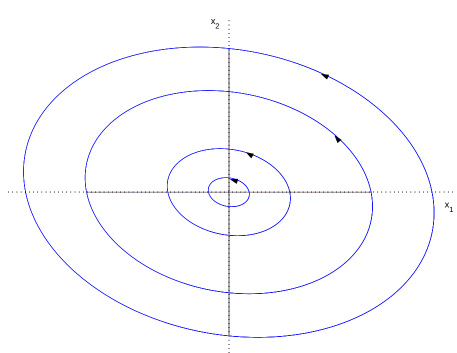
En el plano de fases tenemos

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

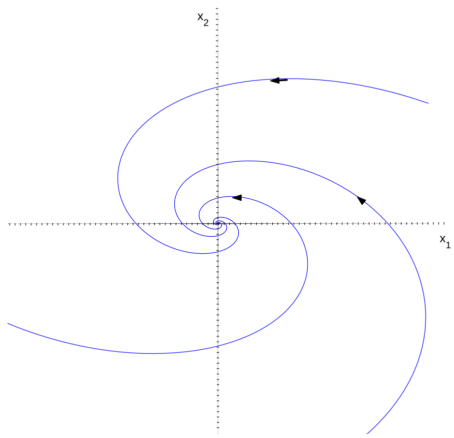
donde $Q = [\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2]$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Como una transformación lineal transforma círculos en elipses, el diagrama de fases queda, dependiendo de α de la siguiente manera.

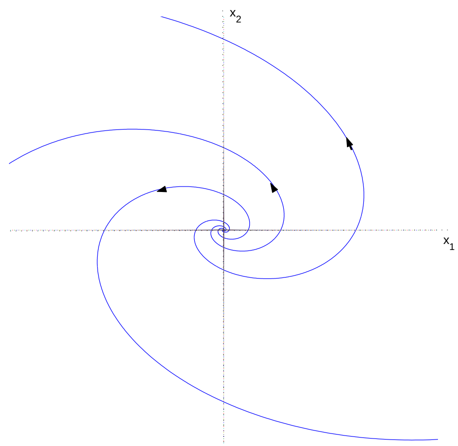
$\underline{\alpha = 0}$



$\underline{\alpha < 0}$



$\underline{\alpha > 0}$



De los diagramas de fases que hemos esbozado podemos concluir, en particular, que si todos los autovalores de A tienen parte real negativa, todas las trayectorias tienden a 0 cuando el tiempo tiende a $+\infty$. Si todos los autovalores de A tienen parte real positiva, todas las trayectorias tienden a 0 cuando el tiempo tiende a $-\infty$, es decir, se alejan de 0 cuando el tiempo avanza. Esto es así tanto si los autovalores son reales como si son complejos conjugados. La diferencia es el modo en que se acercan o alejan de 0.

Si un autovalor es positivo y el otro negativo, hay exactamente dos trayectorias que se acercan a 0 cuando el tiempo tiende a $+\infty$. Estas trayectorias son las que corresponden a la recta de autovectores asociados al autovalor negativo. Y hay exactamente dos trayectorias que se acercan a 0 cuando el tiempo tiende a $-\infty$ (se alejan del origen cuando el tiempo avanza). Estas trayectorias son las que corresponden a la recta de autovectores asociados al autovalor positivo. Todas las demás trayectorias se alejan del origen tanto hacia el futuro como hacia el pasado.

6.3. **Linearización.** Ahora que entendemos los diagramas de fases de sistemas lineales con coeficientes constantes estamos en condiciones de esbozar los diagramas de fases de sistemas no lineales cerca de puntos de equilibrio.

Recordemos que un punto de equilibrio es un cero de la función $F(X)$. Sea entonces X_0 un equilibrio, tenemos para X cerca de X_0,

$$F(X) \sim DF(X_0)(X - X_0).$$

Por lo tanto, si llamamos $Y = X - X_0$, tendremos

$$Y' = (X - X_0)' = X' = F(X) \sim DF(X_0)(X - X_0) = DF(X_0)Y$$

para $Y \sim 0$. El sistema

$$Y' = DF(X_0)Y$$

es un sistema lineal con coeficientes constantes (con matriz $A = DF(X_0)$). Lo que tenemos entonces es que para $X(t)$ cerca de X_0, $X(t) - X_0$ es parecido a la solución $Y(t)$ de este sistema cerca de $Y_0 = 0$.

Enunciemos ahora sin demostración el resultado que asegura que en efecto esto es así si los autovalores de la matriz $DF(X_0)$ tienen parte real no nula.

Teorema 6.1 (Estabilidad Lineal)**.** *Sea F un campo C^1 en $\mathbb{R}^2$. Sea X_0 un cero de F. Si $DF(X_0)$ no tiene autovalores con parte real 0, el diagrama de fases del sistema*

$$X' = F(X)$$

en un entorno de X_0 es muy parecido al diagrama de fases del sistema

$$Y' = DF(X_0)Y$$

cerca de $Y_0 = 0$. Con ésto queremos decir que hay una biyección continuamente diferenciable con inversa continuamente diferenciable entre un entorno de X_0 y un entorno del 0 que manda trayectorias del sistema $X' = F(X)$ en trayectorias del sistema $Y' = DF(X_0)Y$ preservando su orientación.

En particular, si todos los autovalores de $DF(X_0)$ tienen parte real negativa se sigue que todas las trayectorias que pasan cerca de X_0 tienden a X_0 cuando t tiende a $+\infty$. Y si todos tienen parte real positiva, todas las trayectorias se alejan de X_0 cuando el tiempo crece ($X(t) \to X_0$ cuando $t \to -\infty$).

Si $DF(X_0)$ tiene un autovalor $\lambda_1 > 0$ y un autovalor $\lambda_2 < 0$ hay dos trayectorias del sistema $X' = F(X)$ que tienden a X_0 cuando el tiempo tiende a $+\infty$. Estas trayectorias son tangentes en X_0 a la recta de autovectores asociados a λ_2. Análogamente, hay dos trayectorias del sistema $X' = F(X)$ que tienden a X_0 cuando el tiempo tiende a $-\infty$. Estas trayectorias son tangentes en X_0 a la recta de autovectores asociados a λ_1. Todas las demás trayectorias que pasan cerca de X_0 se alejan de X_0 tanto hacia el futuro como hacia el pasado.

□

Ejemplo 6.2. Apliquemos este resultado para estudiar el diagrama de fases del sistema simbiótico del comienzo del capítulo cerca de los equilibrios $(0,0)$ y $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$.

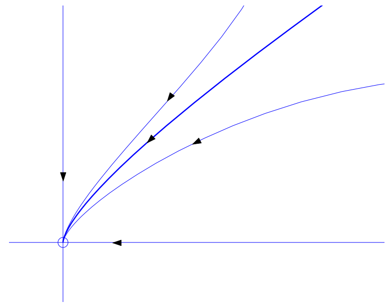
En este caso el campo F es $\big((-\alpha + \beta y)x, (-\gamma + \delta x)y\big)$. De aquí que

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} -\alpha + \beta y & \beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

que tiene autovalores $\lambda_1 = -\alpha$, $\lambda_2 = -\gamma$. Por lo tanto todas las trayectorias cercanas al $(0,0)$ se acercan a él cuando el tiempo tiende a $+\infty$ como sugería el diagrama que obtuvimos siguiendo las flechas, a saber



Por otro lado,

$$DF(\gamma/\delta, \alpha/\beta) = \begin{pmatrix} 0 & \beta\gamma/\delta \\ \delta\alpha/\beta & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene como autovalores las raices del polinomio $\lambda^2 - \alpha\gamma$. Es decir, $\lambda_1 = \sqrt{\alpha\gamma}$, $\lambda_2 = -\sqrt{\alpha\gamma}$. De nuevo, vemos que el diagrama de fases cerca de este equilibrio es como lo esbozamos al comienzo del capítulo ya que será parecido al del Caso I de la sección anterior. Más aún, podemos saber cómo van a salir (o entrar) las trayectorias al equilibrio $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ ya que son tangentes a las rectas de autovectores de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta\gamma/\delta \\ \delta\alpha/\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar estas rectas debemos resolver por un lado

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha\gamma} & -\beta\gamma/\delta \\ -\delta\alpha/\beta & \sqrt{\alpha\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

es decir

$$\sqrt{\alpha\gamma}\, x_1 - \frac{\beta\gamma}{\delta}\, x_2 = 0$$

lo que da la recta

$$x_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\, \frac{\delta}{\beta}\, x_1.$$

Por lo tanto, hay una trayectoria tangente a esta recta que sale del equilibrio $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$.

Análogamente, para el autovalor $-\sqrt{\alpha\gamma}$ tenemos que resolver

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha\gamma} & -\beta\gamma/\delta \\ -\delta\alpha/\beta & -\sqrt{\alpha\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

es decir

$$\sqrt{\alpha\gamma}\, x_1 + \frac{\beta\gamma}{\delta}\, x_2 = 0$$

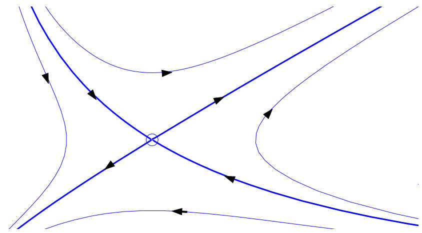
lo que da la recta

$$x_2 = -\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\, \frac{\delta}{\beta}\, x_1.$$

Por lo tanto, hay una trayectoria tangente a esta recta que entra al equilibrio $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$.

Esto se ve en el diagrama de fases que esbozamos en el ejemplo 6.1 al comienzo del capítulo.

Cerca del equilibrio el diagrama de fases es



Ejemplo 6.3. La ecuación del péndulo simple amortiguado es

$$x'' + gL\text{sen}\, x + cx' = 0$$

donde $c > 0$, $g > 0$ es la constante de la gravedad, $L > 0$ es la longitud del péndulo y x es el ángulo que el péndulo forma con la vertical que apunta hacia abajo. Esta ecuación es equivalente al siguiente sistema en el plano de fases (x, y) donde y representa la velocidad de variación del ángulo,

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -gL\text{sen}\, x - cy \end{cases}$$

Este es un sistema de la forma $X' = F(X)$ con $F = (y, -gL\text{sen}\, x - cy)$. Los equilibrios del sistema (los ceros de F) son los punto (x_0, y_0) tales que $y_0 = 0$, $gL\text{sen}\, x_0 - cy_0 = 0$. Es decir, $y_0 = 0$, $\text{sen}\, x_0 = 0$. Para ángulos x_0 entre $-\pi$ y π los equilibrios son $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, 0)$. Observemos que físicamente los puntos $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$ representan la misma posición y velocidad en el espacio.

Analicemos el diagrama de fases cerca de los equilibrios. Para ésto veamos cual es el sistema linearizado

$$X' = DF(X_0)X.$$

Se tiene $F = (y, -gL\text{sen}\, x - cy)$. Por lo tanto

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -gL\cos x & -c \end{pmatrix}$$

y

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -gL & -c \end{pmatrix}$$

que tiene por autovalores las raices del polinomio $\lambda^2 + c\lambda + gL = 0$, es decir $\lambda_{1,2} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4gL}}{2}$. Se tiene que ambas raices tienen parte real negativa. Por lo tanto todas las trayectorias cercanas al $(0, 0)$ tienden a $(0, 0)$ cuando el tiempo tiende a $+\infty$. Pero la forma en que tienden depende de la magnitud de la amortiguación dada por la constante c. En efecto, si $c^2 \geq 4gL$, los autovalores de la matriz del sistema linearizado son reales y las trayectorias tienden al equilibrio sin oscilar alrededor de él. En cambio, si $c^2 < 4gL$, los autovalores son complejos conjugados de parte real negativa y las trayectorias se acercan al equilibrio en forma espiral.

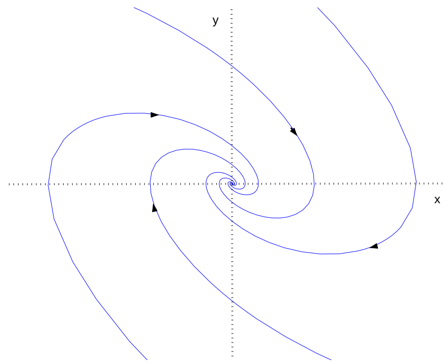


Diagrama de fases del péndulo subamortiguado cerca del $(0,0)$

Con respecto al ángulo x del péndulo, ésto dice que cerca de la posición de equilibrio $x=0$, velocidad $x'=0$, el ángulo tenderá a cero sin oscilaciones si está muy amortiguado y oscilando indefinidamente alrededor de la posición de equilibrio si está subamortiguado. Esto es exactamente lo que se observa para un resorte, lo que no es casual porque la ecuación del resorte es la ecuación linearizada alrededor de $x=0$.

Analicemos qué pasa para el equilibrio $(\pi,0)$. El sentido común nos dice que es un equilibrio muy inestable y que en esa posición con velocidad no nula por chica que sea nos vamos a alejar de ahí y también que el péndulo va a caer de cualquier posición por cercana que sea. Estas son situaciones en las que el vector velocidad apunta alejándose del equilibrio. Pero también podemos imaginarnos que si le damos el impulso correcto prodríamos llegar arriba (a la posición $x=\pi$ o $x=-\pi$) con velocidad 0. Por supuesto que el impulso debe ser el correcto y una pequeña variación podría hacer que no lleguemos o que nos pasemos (que lleguemos con velocidad positiva). Veamos que ésto se ve linearizando alrededor de $(\pi,0)$. Es decir, que vemos que casi todas las trayectorias se alejan de este equilibrio y que hay exactamente una que se acerca con $x<\pi$. Para ésto veamos que los autovalores de $DF(\pi,0)$ son de distinto signo. En ese caso, el diagrama de fases cerca del equilibrio $(\pi,0)$ es similar al del Caso I de los sistemas lineales con coeficientes constantes que da exactamente la situación que describimos (sólo que en este caso nos restringimos a la región $x<\pi$ que corresponde a $x<0$ para el problema linearizado). En efecto,

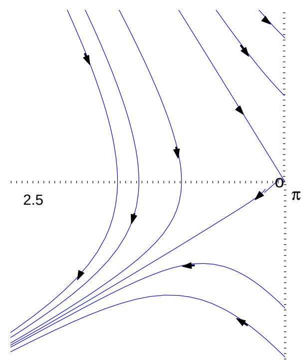
$$DF(\pi,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ gL & -c\end{pmatrix}$$

que tiene por autovalores las raices del polinomio $\lambda^2+c\lambda-gL=0$, es decir $\lambda_{1,2}=\dfrac{-c\pm\sqrt{c^2+4gL}}{2}$ una de las cuales es positiva y la otra negativa. Y se tiene lo afirmado. Si queremos ver cómo entra la trayectoria con la que nos acercamos al equilibrio desde $x<\pi$, debemos encontrar la recta de autovectores asociados al autovalor negativo $\dfrac{-c-\sqrt{c^2+4gL}}{2}$ ya que la trayectoria es tangente a esta recta en $(\pi,0)$. Para ésto debemos resolver

$$\begin{pmatrix}(c+\sqrt{c^2+4gL})/2 & 1\\ gL & (-c+\sqrt{c^2+4gL})/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$$

Es decir, $y = -\dfrac{c + \sqrt{c^2 + 4gL}}{2} x$. Esto nos da asintóticamente la velocidad que el péndulo debe tener al pasar por el ángulo x si queremos llegar a la posición $x = \pi$ con velocidad 0.

El diagrama de fases cerca del $(\pi, 0)$ será



¿Qué pasa si tratamos de analizar la ecuación del péndulo sin amortiguación? Esto es,

$$x'' + gL\operatorname{sen} x = 0.$$

En este caso el sistema equivalente en el plano de fases es

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -gL\operatorname{sen} x \end{cases}$$

que tiene los mismos equilibrios del caso amortiguado. Sin embargo, en este caso

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -gL\cos x & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -gL & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene por autovalores las raices del polinomio $\lambda^2 + gL = 0$. Es decir, $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{gL}$ que tienen parte real 0. Por lo tanto el teorema de estabilidad lineal no nos dice nada en este caso. Sin embargo, hay otra forma de analizar la ecuación del péndulo ya que es un caso particular de sistema conservativo.

Un sistema es conservativo cuando tiene la forma $X'' = -\nabla U(X)$. En el caso particular de incógnita escalar – $x'' = -U'(x)$ – esta ecuación es equivalente a un sistema de 2×2 para el cuál podemos dibujar el diagrama de fases. Esto será objeto de la próxima sección.

6.4. **Sistemas Conservativos.** En esta sección estudiaremos ecuaciones de la forma $x'' = -U'(x)$. La función $U(x)$ se llama potencial del campo conservativo y representa una forma de energía llamada Energía Potencial. La energía mecánica del sistema es la suma de las energías cinética y potencial. Para sistemas conservativos la energía mecánica se conserva (de ahí el nombre). En efecto, si $x(t)$ es una trayectoria, la energía sobre esa trayectoria es

$$E(t) = \frac{1}{2}\dot{x}^2(t) + U(x(t)),$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt}E(t) = \dot{x}(t)\ddot{x}(t) + U'(x(t))\dot{x}(t) = \dot{x}(t)\big(\ddot{x}(t) + U'(x(t))\big) = 0.$$

De aquí que la energía E permanezca constante sobre cada trayectoria.

En el plano de fases se tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -U'(x) \end{cases}$$

La energía se representa en el plano de fases por la función $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + U(x)$. Por lo visto arriba (conservación de la energía) se tiene que $E(x(t), y(t))$ es constante sobre cada trayectoria de este sistema. Esto nos dice que las trayectorias están contenidas en los conjuntos de nivel de la función $E(x, y)$.

Los equilibrios son los puntos (x_0, y_0) tales que $y_0 = 0$ y $U'(x_0) = 0$. Es decir, los puntos de la forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto crítico de la función U. Observemos que $\nabla E(x, t) = (U'(x), y)$ se anula sólo en los equilibrios. Por lo tanto, los conjuntos de nivel que no contienen equilibrios están formados por curvas suaves y cada una de estas curvas es una trayectoria del sistema.

Una forma fácil de ver cómo graficar el diagrama de fases es observar que si una trayectoria pasa en algún momento por un punto de la forma $(\bar{x}, 0)$, la energía sobre esa trayectoria será igual a $U(\bar{x})$. Entonces,

$$U(\bar{x}) = E(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}y^2(t) + U(x(t)) \geq U(x(t)) \qquad \text{para todo } t.$$

Es decir, si en algún instante una trayectoria pasa por el punto $(\bar{x}, 0)$, en todo instante permanece en el *pozo potencial*

$$U(x) \leq U(\bar{x})$$

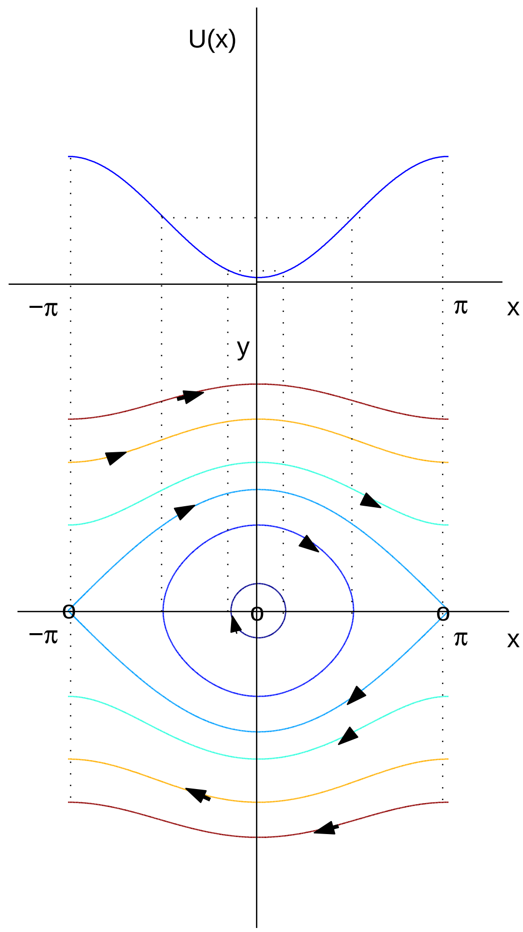
y $U(x(t))$ no puede volver a ser igual a $U(\bar{x})$ hasta que no se tenga simultáneamente $y(t) = 0$.

Observemos que de todos modos puede haber trayectorias que nunca corten al eje x. Esto es así si la función potencial U es acotada superiormente. En efecto, supongamos que está acotada superiormente por la constante M. Si la energía sobre la trayectoria es mayor que M, (y ésto es así si en algún instante la velocidad y es muy grande), no podremos tener nunca $y = 0$. Es decir, no se corta al eje x.

Por otro lado observemos que a medida que $|y|$ crece, $U(x)$ decrece y recíprocamente, cuando $|y|$ decrece, $U(x)$ crece.

Finalmente, observemos que por la paridad de la función $E(x, y)$ en la variable y se tiene que los conjuntos de nivel de E son simétricos respecto del eje x.

Estamos entonces en condiciones de graficar el diagrama de fases (en forma aproximada porque no conocemos exactamente los conjuntos de nivel de la función E). Vamos a hacerlo primero en el caso del péndulo. En este caso el potencial es $U(x) = gL(1-\cos x)$. Para esbozar el diagrama de fases conviene dibujar simultáneamente el potencial U y el diagrama ya que, como vimos, hay una gran correspondencia entre los dos gráficos.



En el gráfico observamos que hay dos trayectorias que conectan los equilibrios inestables $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$. En una de esas trayectorias se sale de $(-\pi, 0)$ en tiempo $t = -\infty$ y se llega a $(\pi, 0)$ en tiempo $t = +\infty$. En la otra, se sale de $(\pi, 0)$ en tiempo $t = -\infty$ y se llega a $(-\pi, 0)$ en tiempo $t = +\infty$. Todas las otras trayectorias corresponden a curvas cerradas. Esto es claro en las que se encuentran dentro de las trayectorias que conectan $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$. Pero también las que están fuera corresponden a curvas cerradas si recordamos que estamos identificando los ángulos π y $-\pi$. Estas trayectorias, que no cortan el eje x, corresponden a niveles de energía mayores que el máximo de $U(x)$. Para estos niveles de energía, el péndulo da vueltas sin parar. Para niveles de energía menores que el máximo de $U(x)$, el péndulo alcanza un ángulo máximo $\bar{x}$ tal que $U(\bar{x}) = E = \max U(x(t))$ es el valor máximo que alcanza U sobre la trayectoria e igual al nivel de energía de esa trayectoria. Cuando llega a este valor lo hace con velocidad nula.

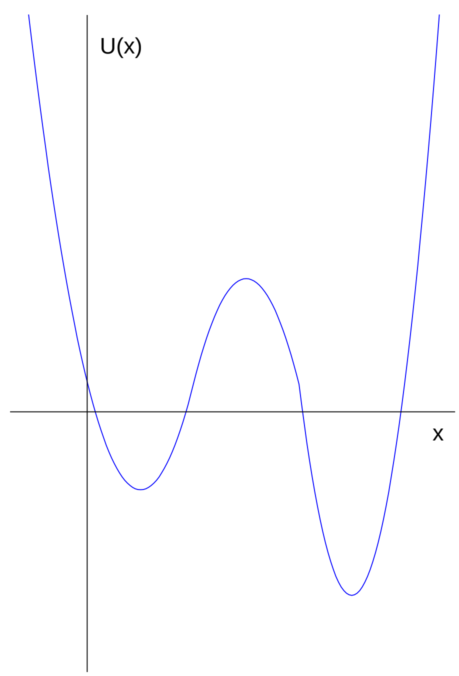
Entonces el movimiento cambia de sentido y lo que observamos, en definitiva es el movimiento oscilatorio que asociamos con la idea de un péndulo.

Además, vemos que el $(0,0)$ es un equilibrio estable en el sentido de que las trayectorias que comienzan cerca de él permanecen cerca, pero no tienden a $(0,0)$ como ocurre en el caso del péndulo amortiguado.

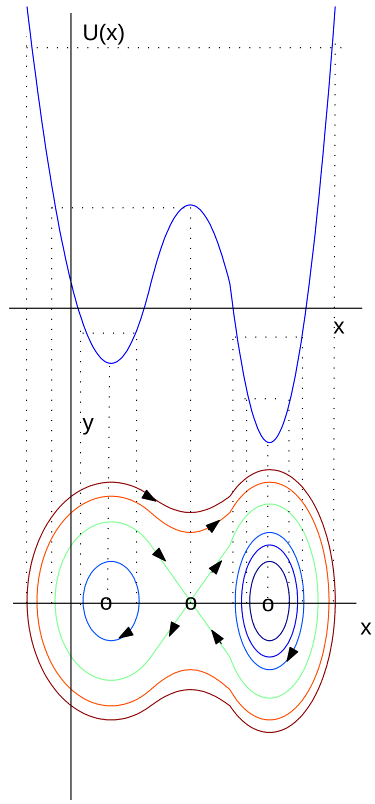
Los conjuntos de nivel correspondientes a niveles de energía menores que max $U(x(t))$ constan de una sola componente que es una trayectoria. En cambio para niveles de enrgía mayores se tienen dos componentes (dos trayectorias). Observen que para el nivel de energía igual al maximo de U hay 4 trayectorias, las dos que describimos antes que conectan los equilibrios $(-\pi,0)$ y $(\pi,0)$ y las dos trayectorias estacionarias correspondientes a estos equilibrios.

Para afianzar las ideas veamos otros ejemplos.

Ejemplo 6.4. Supongamos que nos dan el gráfico del potencial U y esbocemos el diagrama de fases correspondiente. Sea entonces el gráfico de U



El diagrama de fases correspondiente dibujando también el potencial en el mismo gráfico para ayudarnos será

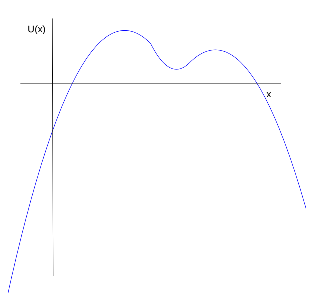


Para dibujar el diagrama de fases observamos que, como $U(x) \to +\infty$ cuando $x \to \pm\infty$ todos los conjuntos de nivel cortan al eje x. Por lo tanto, lo más fácil es dibujarlos a partir de un punto en este eje. Además, como son simétricos respecto de este eje, los dibujamos para $y > 0$ y los completamos en forma simétrica después.

Empezamos entonces en un punto $(\bar{x}, 0)$ y dibujamos la parte de la trayectoria que pasa por ese punto contenida en $y > 0$. Como $y > 0$ se tiene que $U(x(t)) < U(\bar{x})$. Por lo tanto la trayectoria debe moverse hacia valores de x en los que ésto suceda. Más aún, y crece cuando $U(x)$ decrece y cuando $U(x)$ comienza a crecer y decrece. Eventualmente, $U(x)$ alcanza nuevamente el valor $U(\bar{x})$ y en ese punto la trayectoria vuelve a cortar al eje x.

Veamos otro ejemplo.

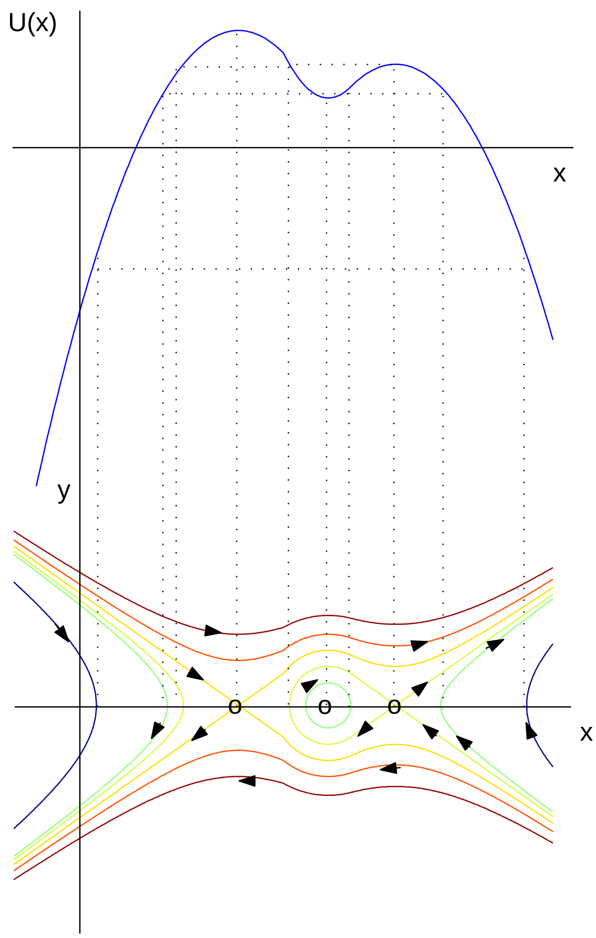
Ejemplo 6.5. Supongamos ahora que el potencial tiene el siguiente gráfico.



En este caso, como U está acotada superiormente, hay trayectorias que no cortan al eje x. De todos modos, siguen las subidas y bajadas del potencial U con decrecimiento y crecimiento, respectivamente de y.

Otras trayectorias sí cortan el eje x. Las que lo hacen para valores de $\bar{x}$ menores que el punto donde alcanza el mayor máximo relativo o para valores mayores que el punto donde alcanza el menor máximo relativo, son trayectorias contenidas en $x \leq \bar{x}$ y $x \geq \bar{x}$ respectivamente ya que sólo hacia esos lados decrece U.

El diagrama de fases correspondiente dibujando también el potencial en el mismo gráfico será



El conjunto de nivel correspondiente al máximo de U está formado por el equilibrio $(x_0, 0)$ con $U(x_0)$ el máximo de U, una trayectoria que entra a $(x_0, 0)$ desde valores de x menores que x_0 y una desde valores mayores, una que sale hacia valores menores que x_0 y una hacia valores mayores.

Correspondiente al otro máximo relativo se tiene un equilibrio, una trayectoria que sale y vuelve a entrar al equilibrio con valores de x menores y dos trayectorias con valores de x mayores, una que entra y una que sale.

Las únicas trayectorias cerradas se encuentran alrededor del equilibrio correspondiente al mínimo relativo de U que resulta ser el único equilibrio estable.

Las flechas que indican el sentido de recorrido de las soluciones se obtienen de la observación general para sistemas conservativos que mientras se esté en el semiplano superior x crece y en el inferior x decrece por ser $y = \dot{x}$.

Agradecimientos

Quisiera agradecer profundamente a Julián Fernández Bonder por sus comentarios y sugerencias respecto del material y la presentación de estas notas. También mi agradecimiento a Gabriel Acosta, Gabriela Armentano, Javier Etcheverry, Pablo Groisman y Ariel Lombardi por su inestimable ayuda con los gráficos.

Referencias

[1] Amann, H., "Ordinary differential equations", Walter de Gruyter, Berlin, 1990.

[2] Ayres, F. "Ecuaciones Diferenciales", Colección Schaum. 1969.

[3] Birkhoff, G. and Rota, G.C. "Ordinary Differential equations", Ginn & Company, 1962.

[4] Coddington, E.A., "Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias", Compañía Editorial Continental, SA, 1ra. ed. en español, 7ma. ed. en inglés, 1968.

[5] Coddington, E.A. & Levinson, N. "Theory of ordinary differential equations", Mc-Graw Hill, 1955.

[6] de Figueiredo, D. & Neves, A., "Equacões Diferenciais Aplicadas", Colecão Matemática Universitária, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1997.

[7] Hirsch, M. W. & Smale, S., "Differential equations, dynamical systems and linear algebra", Academic Press, New York, 1974.

[8] Hurewicz, W. "Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias", Ediciones RIALP, Madrid, 1966.

[9] INCE, E.L. "Integración de ecuaciones diferenciales ordinarias", Editorial Dossat, S.A., Madrid, 1939.

[10] Perko, L., " Differential equations and dynamical systems", Springer-Verlag, New York, 1991.

[11] Pontryagin, L.S. "Ordinary Differential Equations", Addison-Wesley, 1962.