Primer cuatrimestre 2003

ANÁLISIS II - MATEMÁTICA 3

Práctica 3

Cambio de variables y aplicaciones.

1. Sean $D^* = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y T la transformación de coordenadas polares a cartesianas, es decir, $T(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$.
   a) Mostrar que $T(D^*) = D$. ¿Es biyectiva T?
   b) ¿En que transforma T el rectángulo $[r, r + \Delta r] \times [\theta, \theta + \Delta\theta]$?
   c) Calcular la matriz $DT(r, \theta)$. ¿En que transforma la aplicación dada por esta matriz al rectángulo dado en b)? ¿Y en el caso $r = 0$?
   d) Escribir la demostración de la fórmula de cambio de variables en este caso (haciendo los dibujos correspondientes).

2. Sean $D_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 4\pi\}$ y T la transformación del ejercicio anterior.
   a) Hallar $D = T(D_1)$.
   b) Calcular $\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ y $\int_{D_1} r^2 J\, drd\theta$ siendo J el jacobiano de la transformación. ¿Dan igual las dos integrales? ¿Por qué?

3. Sea $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (4u, 2u+3v)$. Sea D^* el rectángulo $[0, 1]\times[1, 2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular:
   a) $\int_D xy\, dxdy$ b) $\int_D (x - y)\, dxdy$
   haciendo un cambio de variables para transformarlas en integrales sobre D^*.

4. Repetir el ejercicio 3 para $T(u, v) = (u, v(1 + u))$.

5. Sean $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ y $D^* = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, b \geq 0\}$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular su área.

6. Sean $T(u, v)$ y D los del ejercicio anterior. Calcular:

$$\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

   haciendo ese cambio de variables.

7. Calcular $\int_D (x^2+y^2)^{3/2}\, dxdy$ donde D es el disco de centro en el origen y radio 2.

8. Hallar el área dentro de la curva $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

9. Dado el paralelogramo P del plano xy con vértices (0,0) , (2,10) , (3,17) y (1,7),

a) Hallar una transformación lineal que convierta a P en un rectángulo R del plano uv con vértices opuestos en $(0,0)$ y $(4,2)$.
b) Calcular la integral $\int_P xy\,dxdy$ transformándola en una integral sobre el rectángulo R.

10. Es sabido, aunque difícil de demostrar, que una primitiva de la función e^{-x^2} no puede expresarse en términos de las funciones elementales usuales. Esto dificulta el cálculo de $\int_a^b e^{-x^2}\,dx$. Sin embargo, el siguiente truco notable permite calcular de manera simple la integral impropia $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$:
a) Observar que $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$
b) Calcular la integral de a) como límite de integrales en círculos utilizando coordenadas polares.

11. Integrar $ze^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro dado por $x^2+y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 4$.

12. Hallar el área acotada por la curva dada por la ecuación $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$. Esta curva se llama lemniscata. ¿Por qué?

13. Calcular el volumen de un cilindro con base circular de radio r y altura h.

14. a) Calcular el volumen $V(R)$ de una esfera B_R de radio R.

b) Llamando ∂B_R a la superficie del borde de la esfera B_R y $A(\partial B_R)$ a su área, demostrar que $\frac{dV(R)}{dR} = A(\partial B_R)$ y deducir el valor del área de dicha superficie.

15. Integrar $x^2+y^2+z^2$ sobre el cilindro dado por $x^2+y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$.

16. Sea B la bola unitaria, es decir, $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Calcular:

$$\int_B \frac{dxdydz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}$$

17. Calcular $\int_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$, donde A esta determinado por las condiciones $x^2+y^2 \leq 1$ y $x+y \geq 1$.

18. Calcular:

$$\int_S \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

donde S es el sólido acotado por dos esferas de radios a y b con $0 < b < a$ y centradas en el origen.

19. Calcular $\int_B z\,dxdydz$ donde B es la región sobre el plano xy dentro del cilindro dado por $x^2+y^2 \leq 1$ y debajo del cono dado por $z = (x^2+y^2)^{1/2}$.

20. Sea E el elipsoide dado por $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2) \leq 1$.
a) Hallar el volumen de E.
b) Calcular $\int_E [(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2)]\,dxdydz$.

21. Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2+y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2+y^2$ si la densidad es $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

22. Hallar el centro de masa del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$, si la densidad es $\rho = (x^2 + y^2)z^2$.

23. Si un sólido W tiene densidad uniforme ρ, el *momento de inercia* alrededor del eje x esta definido por,

$$I_x = \int_W \rho(y^2 + z^2)\, dxdydz$$

y análogamente se definen I_y e I_z. Sea ahora W el sólido con densidad constante acotado por arriba por el plano $z = a$ y por debajo por el cono descripto en coordenadas esféricas por $\phi = k$, donde k es una constante tal que $0 < k < \pi/2$. Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje z.

24. Hallar el momento de inercia alrededor del eje y para la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ si la densidad de masa es una constante ρ.

25. Dado un sólido W con densidad de masa $\rho(x, y, z)$, la fuerza gravitacional **F** que ejerce W sobre una masa m en (x_1, y_1, z_1) está dada por el gradiente de una función V llamada *potencial gravitacional*, es decir, $\mathbf{F}{=}{-}\nabla V$. Este *potencial gravitacional* está dado por,

$$V(x_1, y_1, z_1) = Gm \int_W \frac{\rho(x, y, z)\, dxdydz}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}$$

donde G es la constante de gravitación universal.

a) Hallar el potencial gravitacional sobre una masa m de un planeta esférico con una masa $M = 3\ 10^{26}$kg, a una distancia de $2\ 10^8$m de su centro.

b) Hallar la fuerza gravitacional ejercida sobre un objeto de 70kg en la posición indicada en a).

26. Dada la función

$$r(\varphi) = 1 - \frac{1}{2}\cos(2\varphi) \quad \text{para } 0 \leq \varphi \leq \pi$$

que determina una curva en el plano xz (curva en coordenadas polares considerando que φ es el ángulo que forma el radio vector r con el eje z).
Sea S la superficie de revolución alrededor del eje z generada por esta curva.
Calcular el volumen encerrado por esta superficie.
Sugerencia: Pruebe y use la identidad trigonométrica

$$1 - \frac{1}{2}\cos(2\varphi) = \frac{3}{2} - \cos^2(\varphi)$$