Primer cuatrimestre 2003

ANÁLISIS II - MATEMÁTICA 3

Práctica 4

Integrales sobre trayectorias.

1. Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las trayectorias siguientes en el valor especificado de t.

a) $\boldsymbol{r}(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t = 0$
b) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t), \quad t = 0$
c) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\operatorname{sen} 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}}), \quad t = 1$
d) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (0, 0, t), \quad t = 1$

2. ¿Qué fuerza actúa en el ejercicio 1.a), sobre una partícula de masa m en $t = 0$ si sigue la trayectoria dada?

3. Suponer que una partícula sigue la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que sale por una tangente en $t = 1$. Hallar la ubicación de la partícula en $t = 2$. Suponer que ninguna fuerza actúa sobre ella después del tiempo $t = 1$.

4. Considerar el punto con función de posición $\boldsymbol{\sigma} : t \to (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$. Hallar la velocidad, rapidez, y la longitud de arco entre los puntos $\boldsymbol{\sigma}(0)$ y $\boldsymbol{\sigma}(2\pi)$. Observar que $\boldsymbol{\sigma}$ describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando; su curva se conoce como cicloide.

5. Calcular la longitud de arco de la curva $\boldsymbol{\sigma}(t)$ en el intervalo $[a, b]$, siendo:

a) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t, t^2) \quad a = 0, \quad b = 1$
b) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\sqrt{t}, t + 1, t) \quad a = 10 \quad b = 20$

6. La longitud de arco $s(t)$ para una trayectoria dada $\boldsymbol{\sigma}(t)$, definida por $s(t) = \int_a^t \|\boldsymbol{\sigma}'(\tau)\| \, d\tau$, representa la distancia que una partícula viajando por la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}$ habrá recorrido en el tiempo t si comienza en el instante a, es decir, da la longitud de $\boldsymbol{\sigma}$ entre $\boldsymbol{\sigma}(a)$ y $\boldsymbol{\sigma}(t)$. Encontrar las funciones longitud de arco para las curvas $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\operatorname{ch}(t), \operatorname{sh}(t), t)$ y $\boldsymbol{\beta}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, con $a = 0$.

7.

a) Sea $\boldsymbol{\alpha}$ cualquier trayectoria diferenciable cuya velocidad nunca es cero. Sea $s(t)$ la función longitud de arco para $\boldsymbol{\alpha}$. Sea $t(s)$ la función inversa de $s(t)$. Probar que la curva $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \circ t$ tiene velocidad unitaria, es decir, $\|\boldsymbol{\beta}'(s)\| = 1 \, \forall s$.
b) Sea $\boldsymbol{\sigma}$ la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = (a\cos(t), a \operatorname{sen}(t), bt), \ t > 0$. Encontrar una trayectoria que trace la misma curva que $\boldsymbol{\sigma}$ pero con velocidad unitaria.

8. Evaluar las siguientes integrales de trayectorias $\int_{\boldsymbol{\sigma}} f(x,y,z)\, ds$, donde
a) $f(x,y,z) = x+y+z, \quad \boldsymbol{\sigma} : t \to (\operatorname{sen} t, \cos t, t), \quad t \in [0, 2\pi]$
b) $f(x,y,z) = \cos z, \quad \boldsymbol{\sigma}$ como en la parte a)
c) $f(x,y,z) = x\cos z, \quad \boldsymbol{\sigma} : t \to (t, t^2, 0), \quad t \in [0,1]$

9. a) Mostrar que la integral de trayectoria de $f(x,y)$ a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

b) Calcular la longitud de arco de $r = 1 + \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

10. Sea $f(x,y) = 2x - y$, $x = t^4$, $y = t^4$, $-1 \leq t \leq 1$. Calcular la integral de f a lo largo de esta trayectoria e interpretar geométricamente la respuesta.

11. Suponer que el semicírculo parametrizado por:

$$\boldsymbol{\sigma} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3,\ \theta \to (0, a\operatorname{sen}\theta, a\cos\theta),\ a > 0,$$

está hecho de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.
a) ¿Cuál es la masa total del alambre?
b) ¿Dónde está el centro de masa de esta configuración de alambre?

12. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, sea la longitud de la gráfica de f en $[a,b]$ definida como la longitud de la trayectoria $t \to (t, f(t))$ para $t \in [a,b]$.
a) Mostrar que la longitud de la gráfica de f en [a,b] es

$$\int_b^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

b) Hallar la longitud de la gráfica de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

13. Sea $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Evaluar la integral de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de cada una de las trayectorias siguientes:
a) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t,t,t), \quad 0 \leq t \leq 1$
b) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\operatorname{sen} t, 0, \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

14. Evaluar cada una de las integrales siguientes:
a) $\int_{\boldsymbol{\sigma}} x\, dy - y\, dx, \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
b) $\int_{\boldsymbol{\sigma}} x\, dx + y\, dy, \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t), \quad 0 \leq t \leq 2$

15. Considerar la fuerza $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.

16. Sea $\boldsymbol{\sigma}$ una trayectoria suave.
a) Suponer que $\boldsymbol{F}$ es perpendicular a $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ en $\boldsymbol{\sigma}(t)$. Mostrar que

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0.$$

b) Si $\boldsymbol{F}$ es paralelo a $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ en $\boldsymbol{\sigma}(t)$, mostrar que

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{\sigma}} ||\boldsymbol{F}||\, ds.$$

(Por paralelo a $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ se entiende que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \lambda(t)\boldsymbol{\sigma}'(t)$, donde $\lambda(t) > 0$.)

17. ¿Cuál es el valor de la integral de un campo gradiente alrededor de una curva cerrada C?

18. Suponer que $\nabla f(x,y,z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$. Si $f(0,0,0) = 5$, hallar $f(1,1,2)$.

19. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido [para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$] por:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z).$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1,y_1,z_1) a (x_2,y_2,z_2), a lo largo de cualquier trayectoria, depende sólo de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$.

20. Par los siguientes campos vectoriales $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

a) Demuestre que es un campo conservativo.

b) Determine una función potencial de F.

c) Calcule la integral de línea de F a lo largo de alguna curva, la que quieran, que una el origen con el punto P indicado.

(1) $F(x,y) = (2xy^3 + y + 1, 3x^2y^2 + x + 7)$, $\quad P = (1,1)$.

(2) $F(x,y) = (y^2e^{x+y} + 1, ye^{x+y}(y+2) + 1)$, $\quad P = (1,1)$.

(3) $F(x,y,z) = (2xy^3z, 3x^2y^2z, x^2y^3)$, $\quad P = (1,1,1)$.

(4) $F(x,y,z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$, $\quad P = (1,1,1)$.

21. Calcular

$$a) \quad \int_{(1,0)}^{(3,2)} 2xy\,dx + x^2\,dy \qquad\qquad b) \quad \int_{(0,0,0)}^{(3,-2,5)} 3x\,dx + y^3\,dy - z^2\,dz$$

¿Por qué en ninguno de los dos casos se da una curva que una los extremos de integración? Justificar.

22. Calcular la integral de línea del campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x,y,z) = \left(e^{xz}(xyz^2 + yz), xze^{xz}, e^{xz}(x^2yz + xy)\right)$$

a lo largo de la curva $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\sigma(t) = \left(\frac{\operatorname{senh} 5t}{\operatorname{senh} 5}, t^4 + 5t^3 - 3t^2 - 2t, \frac{1}{\ln 7}\ln(1+6t^8)\right)$$

23. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 definida en $\mathbb{R}$. Demuestre que

$$\int_{\mathcal{C}} f(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0$$

donde $\mathcal{C}$ es cualquier curva cerrada.