2do cuat. 2003

Análisis II - Matemática 3

Práctica 1 - Integrales dobles

1. Evaluar cada una de las integrales siguientes si $R = [0,1] \times [0,1]$:

   (a) $\displaystyle\int_R (x^3 + y^2)\, dxdy$ (b) $\displaystyle\int_R ye^{xy}\, dxdy$

   (c) $\displaystyle\int_R (xy)^2 \cos x^3\, dxdy$ (d) $\displaystyle\int_R \ln[(x+1)(y+1)]\, dxdy$

   (e) $\displaystyle\int_R (x^m y^n)\, dxdy,$ donde $m, n > 0$ (f) $\displaystyle\int_R (ax + by + c)\, dxdy$

   (g) $\displaystyle\int_R \sin(x+y)\, dxdy$ (h) $\displaystyle\int_R (x^2 + 2xy + yx^{1/2})\, dxdy$

2. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz, el plano yz, el plano xy, los planos $x = 1$ y $y = 1$, y la superficie $z = x^2 + y^4$.

3. Sean f continua en $[a, b]$ y g continua en $[c, d]$. Mostrar que

$$\int_R [f(x)g(y)]\, dxdy = \int_a^b f(x)\, dx \int_c^d g(y)\, dy$$

   donde $R = [a, b] \times [c, d]$.

4. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z = \sin y$, los planos $x = 1, x = 0, y = 0, y = \pi/2$ y el plano xy.

5. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0,1] \times [0,2]$ y los "lados verticales" de R.

6. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y, & \text{si } x \text{ no es racional} \end{cases}$$

   Mostrar que la integral iterada $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\, dy\right] dx$ existe pero f no es integrable. ¿Existe la otra integral iterada?

7. Sea $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$. Calcular $\displaystyle\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dxdy$ en términos de F.

8. Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones D determinadas por los límites de integración:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} dydx$

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dydx$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y)\, dydx$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\, dydx$

   (e) $\displaystyle\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2+y)\, dxdy$

   (f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\, dydx$

   (g) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dydx$

   (h) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \sin x\, dydx$

   (i) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^{y} (x^n+y^m)\, dxdy \qquad (m,n>0)$

   (j) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x\, dydx$

   (k) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\sin y} y\, dxdy$

   (l) $\displaystyle\int_{-2}^0 \int_{x^3}^{x+1} (y^2+1)\, dydx$

9. Usar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r y el área de una elipse con semiejes de longitud a y b.

10. Calcular
$$\int_T (x \sin x + y \sin(x+y))\, dxdy$$
siendo T el triángulo de vértices $(1,0)$, $(0,1)$ y $(3,3)$.

11. Sea D la región acotada por los semiejes positivos de x e y y la recta $3x+4y=10$. Calcular
$$\int_D (x^2+y^2)\, dxdy$$

12. Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x=-4y^2+3$. Calcular
$$\int_D x^3 y\, dxdy$$

13. Calcular el volumen de un cono de base de radio r y altura h.

14. Calcular el volumen de las siguientes regiones:

    (a) R: encerrada por la superficie $z=x^2+y^2$ y el plano $z=10$.

(b) R: encerrada por el cono de altura 4 dado por $z^2 = x^2 + y^2$.

(c) R: encerrada por las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

(d) R: elipsoide con semiejes a,b y c.

(e) R: determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$ y $z \geq 2$.

15. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, dibujar las regiones correspondientes y evaluar la integral por los dos caminos.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 xy\, dydx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2-y}^1 (x+y)^2\, dxdy$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} x^2 y\, dydx$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2\, dxdy$

(e) $\displaystyle\int_{-3}^3 \int_{-(9-y^2)^{1/2}}^{(9-y^2)^{1/2}} x^2\, dxdy$

16. Calcular $\displaystyle\int_D y^2 x^{1/2}\, dxdy$ donde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > x^2, y < 10 - x^2\}$$

17. Calcular $\displaystyle\int_T e^{x-y}\, dxdy$ donde T es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,3)$, y $(2,2)$.

18. Teniendo en cuenta que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s)\, ds$$

y

$$f'(s) = f'(0) + \int_0^s f''(t)\, dt$$

se tiene

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x \int_0^s f''(t)\, dtds$$

cambiar el orden de integración para demostrar que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x f''(s)(x-s)\, ds$$

Usando la misma idea demostrar la fórmula general:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \int_0^x f^{(n+1)}(s)\frac{(x-s)^n}{n!}\, ds$$

19. Supongamos que $P_i = (x_i, y_i)$ es una sucesión de puntos tomados al azar con distribución uniforme en el cuadrado $C = [0,1] \times [0,1]$ (ver Nota 1). Demostrar que si $f(x,y)$ es una función continua en C entonces,

$$\int_C f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)$$

Nota 1: Con esto queremos decir que la fracción de puntos que caen dentro de un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d] \subset C$ es precisamente la fracción del área que este rectángulo ocupa. Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N^0\{P_i : P_i \in R, i \leq n\}}{n} = (b-a)(d-c)$$

Nota 2: Esta metodología para aproximar integrales esta dentro de lo que se conoce como "métodos de Montecarlo".