

## Análisis II - Matemática 3

### PRÁCTICA 5 - INTEGRALES SOBRE SUPERFICIES

1. Dar una ecuación en coordenadas cartesianas para las superficies dadas en coordenadas esféricas por  $r = k$  ( $k = cte$ ). Graficar. Y ahora por  $\varphi = k$ ,  $0 < k < \pi/2$ . Hallar un vector normal en cada punto.

2. (a) Mostrar que  $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dadas por

$$\Phi_1(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right) \quad \Phi_2(u, v) = (au \cos(v), bu \sin(v), u^2)$$

son dos parametrizaciones del paraboloides elíptico.

- (b) Mostrar que

$$\Phi(u, v) = ((a + b \cos(u)) \sin(v), (a + b \cos(u)) \cos(v), b \sin(u))$$

$0 < b < a$ , y  $u, v \in [0, 2\pi]$ , es una parametrización del toro.

3. Considerar la superficie

$$x = u \cos(v) \quad y = u \sin(v) \quad z = u$$

¿Es diferenciable esta superficie? ¿Es suave?

4. Si la superficie es el gráfico de una función diferenciable  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , demostrar que se trata de una superficie suave. ¿Qué pasa si  $g$  no es diferenciable?
5. Encontrar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto especificado

- (a)  $x = 2u$ ,  $y = u^2 + v$ ,  $z = v^2$  en el punto  $(0, 1, 1)$ .

- (b)  $x = u^2 - v^2$ ,  $y = u + v$ ,  $z = u^2 + 4v$  en el punto  $(-1/4, 1/2, 2)$ .

6. Encontrar una fórmula para el plano tangente a la superficie  $x = h(y, z)$  en el punto  $(h(y_0, z_0), y_0, z_0)$

7. Sea  $\phi(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad z = \theta$$

Graficar. Hallar el vector normal en cada punto y por último hallar su área.

8. Sea  $\phi(u, v) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$$

Calcular su área.

9. Calcular el área de la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  con  $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$ . (Bóveda de Viviani).
10. Sea la curva  $z = f(x)$   $x \in [\alpha, \beta]$  con  $f$  y  $\alpha$  positivos, girada alrededor del eje  $z$ . Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio 2 ítem (a) para calcular el área del paraboloido elíptico con  $1 \leq z \leq 2$ , y  $a = b = 1$ .

11. Calcular  $\int_S xy dS$  donde  $S$  es el borde del tetraedro con lados  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + z = 1$  y  $x = y$ .
12. Calcular  $\int_S (x + y + z) dS$  donde  $S$  es el borde de la bola unitaria, es decir  $S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .
13. Hallar la masa de una superficie esférica de radio  $r$  tal que en cada punto  $(x, y, z) \in S$  la densidad de masa es igual a la distancia entre  $(x, y, z)$  y el punto  $(0, 0, 1)$ .
14. Evaluar el flujo saliente del campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  a través de la superficie del cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .
15. Sea la temperatura de un punto de  $\mathbb{R}^3$  dada por la función  $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$  calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo  $-\nabla T$ ) a través de la superficie  $x^2 + z^2 = 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ , orientada de forma que la normal en el punto  $(0, 0, \sqrt{2})$  sea  $(0, 0, 1)$ .
16. Sea  $S$  la superficie de la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial y  $F_r$  su componente radial. Probar que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r \sin(\phi) d\phi d\theta$$

17. Sea  $S$  la parte del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  con  $z$  entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular  $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  con  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ .

18. Sean  $S$  una superficie y  $C$  una curva cerrada que es el borde de  $S$ . Verificar que si  $\mathbf{F}$  es un campo gradiente ( $\mathbf{F} = \nabla f$ ) entonces

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

19. Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x^2, yx^2)$  que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano  $xy$  a través del cuadrado  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .