2do cuat. 2003

Análisis II - Matemática 3

Práctica 7 - Diagramas de Fase

1. Realice un gráfico aproximado de las líneas de flujo de los siguientes campos vectoriales:

   (a) $F(x,y) = (y, -x)$ (b) $F(x,y) = (x, -y)$ (c) $F(x,y) = (x, x^2)$

2. Para el siguiente sistema de dos poblaciones que compiten por un mismo alimento, realice un gráfico aproximado del diagrama de fases a partir del dibujo del campo vectorial.

$$\begin{cases} \dot{x} = (2 - x - y)x \\ \dot{y} = (3 - x - 2y)y \end{cases}$$

3. Esboce el diagrama de fases de los sistemas lineales de los siguientes ejercicios de la Práctica 8:

   Ejercicio 1, (b) y (c); Ejercicio 3, (b) y (d)

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz cuyos autovalores son λ y μ. Esbozar el diagrama de fases correspondiente al sistema $X' = AX$ si

   (a) $\lambda > \mu > 0$ (b) $0 > \lambda > \mu$
   (c) $\lambda > 0 > \mu$ (d) $\lambda = \alpha + i\beta,\ \mu = \alpha - i\beta$ con $\beta \neq 0$
   (e) $0 \neq \lambda = \mu \in \mathbb{R}$ (f) $\lambda = 0,\ \mu > 0$

5. Para los siguientes sistemas hallar los puntos de equilibrio y esbozar el diagrama de fases cerca de cada uno de ellos.

$$\text{(a)} \begin{cases} \dot{x} = xe^y \\ \dot{y} = \operatorname{sen} x + y - 1 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \dot{x} = e^{x-y} - 1 \\ \dot{y} = xy - 1 \end{cases}$$

6. Considerar los siguientes sistemas de depredador–presa con crecimiento logístico.

$$\text{(a)} \begin{cases} \dot{x} = (2 - x - y)x \\ \dot{y} = (-1 + x - y)y \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \dot{x} = (1 - x - y)x \\ \dot{y} = (-2 + x - y)y \end{cases}$$

   Hallar los puntos de equilibrio (x_0, y_0) con $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$ y esbozar el diagrama de fases en la cercanía de los mismos.

   Tratar de ver cómo es el diagrama global. Observar que el comportamiento puede ser muy distinto dependiendo de los parámetros de la ecuación.

7. Considerar el sistema de ecuaciones diferenciales que modela el flujo en $\mathbb{R}^2$ asociado a un campo vectorial gradiente, es decir un sistema de la forma $X' = -\nabla V(X)$ con $V \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Hallar los puntos de equilibrio del sistema e investigar su estabilidad si los extremos locales de la función V son no degenerados (es decir, si los autovalores del Hessiano de V en los extremos locales de V son no nulos).

8. Si la fuerza de atracción entre dos masas que se encuentran a distancia r es de la forma $F = -\dfrac{k}{r^2}$

   (a) Hallar la energía potencial y esbozar el diagrama de fases si el potencial tiende a cero cuando $r = +\infty$.

   (b) Si a una distancia r_0 la energía cinética es $T_0 < -U(r_0)$. ¿Cuál es la distancia máxima de separación posible de estas masas?

   (c) ¿Qué sucede si la energía total es

      i. positiva, ii. negativa, iii. nula?

9. Supongamos que la fuerza de atracción entre los átomos de una molécula diatómica es de la forma $F(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{a}{x^3}$ donde x es la distancia entre los mismos.

   (a) Hallar la energía potencial y esbozar el diagrama de fases si el potencial tiende a 0 cuando x tiende a infinito.

   (b) Utilizando el diagrama de fases, observar que

      i. la distancia entre los átomos permanece constante si y sólo si en algún momento se encuentran a distancia a y velocidad 0.

      ii. Si la energía total E_0 es negativa, la distancia entre los átomos crece y decrece en forma oscilatoria entre dos valores máximo y mínimo dependientes sólo de E_0.

      iii. Si la energía total es no negativa, la distancia entre los átomos tiende a infinito cuando el tiempo tiende a infinito aunque pueden acercarse inicialmente.

      iv. ¿Cuál es la energía mínima posible del sistema, E_{min}?

      v. En todos los casos, ¿cuál es la distancia mínima entre los átomos si la energía de la molécula es $E_0 \geq E_{min}$?