1er cuat. 2004

Análisis II - Matemática 3

Práctica 8 - Ecuaciones de 2do. Orden

1. (a) Encontrar un sistema fundamental de soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

   i. $y'' - 8y' + 16y = 0$ ii. $y'' - 2y' + 10y = 0$ iii. $y'' - y' - 2y = 0$

   (b) En cada uno de los casos anteriores encontrar una solución exacta de la ecuación no homogénea correspondiente con término independiente $x, e^x, 1$ y e^{-x}.

2. Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) dos puntos del plano tales que $\frac{a_1 - a_2}{\pi}$ no es un número entero.

   (a) Probar que existe exactamente una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ cuya gráfica pasa por esos puntos.

   (b) ¿Se cumple en algún caso la parte (a) si $a_1 - a_2$ es un múltiplo entero de π?

   (c) Generalizar el resultado de (a) para la ecuación $y'' + k^2 y = 0$. Discutir también el caso $k = 0$.

3. Hallar todas las soluciones de $y'' - y' - 2y = 0$ y de $y'' - y' - 2y = e^{-x}$ que verifiquen:

   (a) $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ (b) $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ (c) $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

   (d) $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$ (e) $y(0) = 1$ (f) $y'(0) = 1$

4. Encontrar la solución general de:

   a) $y'' + 4y = 4\cos 2x + 6\cos x$
   b) $y'' + 4y = 8x^2 - 4x$
   c) $y'' + 4y = 4\cos 2x + 6\cos x + 8x^2 - 4x$

   Encontrar la solución de c) tal que $y(0) = y'(0) = 0$.

5. En el interior de la Tierra, la fuerza de gravedad es proporcional a la distancia al centro. Si se perfora un orificio que atraviese la Tierra pasando por el centro, y se deja caer una piedra en el orificio, ¿con qué velocidad llegará al centro?.

6. Sea I un intervalo que no contiene al 0, C_1, C_2 dos constantes arbitrarias. Verifique que $y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2x^5$ es una solución de $x^2y'' - 3xy' - 5y = 0$. Muestre que si se fija $x_0 \in I$ y dos valores arbitrarios y_0, y_0' es posible elegir C_1, C_2 (y de manera única) tal que $y(x)$ verifique además $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$

7. Demuestre que $y(x) = x^2\text{sen}x$ e $y = 0$ son soluciones de

$$x^2y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0$$

y que ambas satisfacen las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$. ¿Contradice esto el teorema de unicidad? Si no es así, ¿por qué no?

8. Consideremos la ecuación lineal de orden 2

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

con $a_1, a_2 : I \to \mathbb{R}$ continuas (I un intervalo).
i) Mostrar que si y_1, y_2 son soluciones de esta ecuación, entonces:

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' = C\text{e}^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds} \quad , C \in \mathbb{R}$$

(Sugerencia, calcular W').
ii) Si y_1, y_2 son soluciones de esta ecuación y ambas se anulan en un punto $x_0 \in I$, demostrar que una es un múltiplo constante de la otra.

9. i) Si y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

mostrar que:

$$a_1 = -\frac{y_1y_2'' - y_2y_1''}{W(y_1, y_2)}$$

$$a_2 = \frac{y_1'y_2'' - y_2'y_1''}{W(y_1, y_2)}$$

ii) Hallar una ecuación diferencial lineal en I que tenga las funciones y_1, y_2 como base de soluciones en los siguientes casos:

a)	$I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$y_1(x) = \cos(x)$	$y_2(x) = \text{tg}(x)$
b)	$I = \mathbb{R}$	$y_1(x) = \exp(x)$	$y_2(x) = \exp(2x)$
c)	$I = \mathbb{R}$	$y_1(x) = \exp(-3x)$	$y_2(x) = x\exp(-3x)$
d)	$I = \mathbb{R}_{>0}$	$y_1(x) = \frac{1}{x}$	$y_2(x) = x^5$ (Comparar con el ej. 1)

10. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones, empleando la solución dada:

i)	$xy'' + 2y' + xy = 0$	$I = \mathbb{R}_{>0}$	$y_1(x) = \frac{\text{sen}x}{x}$
ii)	$xy'' - y' - 4x^3y = 0$	$I = \mathbb{R}_{>0}$	$y_1(x) = \exp(x^2)$
iii)	$xy'' - y' - 4x^3y = 0$	$I = \mathbb{R}_{<0}$	$y_1(x) = \exp(x^2)$
iv)	$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$	$I = (-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$	$y_1(x) = x$

Este último es un caso especial de la ecuación $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$ (ecuación de Legendre), correspondiente al caso $p = 1$, en los intevalos en que la ecuación es normal.

11. Sabiendo que la ecuación $L(y) = y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $(a_1, a_2 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$continuas) tiene a $y_1 = \cos x, y_2 = \text{tg}x$ como soluciones, hallar todas las soluciones de $L(y) = 0$ que verifican $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Hallar todas las soluciones de $L(y) = \frac{1+\text{sen}^2 x}{\cos x}$.

12. Probar que las funciones

$$\phi_1(t) = \begin{cases} t^2 & t \le 0 \\ 0 & t \ge 0 \end{cases} \qquad \phi_2(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t^2 & t \ge 0 \end{cases}$$

son linealmente independientes en $\mathbb{R}$ pero que $W(\phi_1, \phi_2)(0) = 0$. ¿Existe algún sistema lineal normal de orden 2 definido en algún intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ que admita a $\{\phi_1, \phi_2\}$ como base de soluciones?

13. Sabiendo que $y_1(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación homogénea asociada, hallar todas las soluciones de $y'' + xy' = 3x$.

14. La ecuación $x^2y'' + pxy' + qy = 0$ (p, q constantes) se denomina ecuación de Euler.

    (a) Demuestre que el cambio de variables $x = \mathrm{e}^t$ transforma la ecuación en una con coeficientes constantes.

    (b) Aplique (a) para resolver en $\mathbb{R}_{>0}$ las ecuaciones:

    i. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$ ii. $x^2y'' - xy' + y = 2x$

15. Vibraciones en sistemas mecánicos:

Una carreta de masa M está sujeta a una pared por medio de un resorte, que no ejerce fuerza cuando la carreta está en la posición de equilibrio $x = 0$. Si la carreta se desplaza a una distancia x, el resorte ejerce una fuerza de restauración igual a $-\kappa x$, donde κ es una constante positiva que mide la rigidez del resorte. Por la segunda ley del movimiento de Newton, se tiene que:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa x \quad \text{o bien } x'' + a^2x = 0, \quad a = \sqrt{\kappa/M} \tag{1}$$

(a) Si la carreta se lleva a la posición $x = x_0$ y se libera sin velocidad inicial en el instante $t = 0$, hallar la función $x(t)$. Verificar que se trata de una función periódica. Calcular su período τ, y su frecuencia $f = 1/\tau$ (la cantidad de ciclos por unidad de tiempo). Verificar que la frecuencia de vibración aumenta al aumentar la rigidez del resorte, o al reducir la masa de la carreta (como dice el sentido común) y que la amplitud de esta oscilación es x_0.

Si se produce una amortiguación que se opone al movimiento, y de magnitud proporcional a la velocidad ($= -c\frac{dx}{dt}$) debida al rozamiento, la ecuación (1) que describe el movimiento de la carreta en función del tiempo se convierte en:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + \kappa x = 0$$

o bien:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = 0, \qquad b = \frac{c}{2M} \quad a = \sqrt{\frac{\kappa}{M}} \tag{2}$$

(b) Si $b > a$ (la fuerza de fricción debida al rozaminto es grande en comparación con la rigidez del resorte), encontrar la solución de (2) que verifique como antes $x(0) = x_0,\ x'(0) = 0$. Probar que no hay ninguna vibración y que la carreta vuelve simplemente a su posición de equilibrio. Se dice que el movimiento está sobreamortiguado.

(c) Si $b = a$, ver que tampoco hay vibración y que el comportamiento es similar al del caso anterior. Se dice que el movimiento es críticamente amortiguado.

(d) Si ahora $b < a$ (caso subamortiguado), probar que la solución de (2) con las condiciones iniciales $x(0) = x_0,\ x'(0) = 0$ es:

$$x(t) = x_0\frac{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}{\alpha}\mathrm{e}^{-bt}\cos(\alpha t - \theta) \tag{3}$$

donde $\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}$, y $\tan\theta = b/\alpha$.
Esta función oscila con una amplitud que se reduce exponencialmente. Su gráfica cruza la posición de equilibrio $x = 0$ a intervalos regulares, aunque no es periódica. Hacer un dibujo. Probar que el tiempo requerido para volver a la posición de equilibrio es:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\kappa}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}}$$

y su "frecuencia" está dada por $f = 1/T$ llamada frecuencia natural del sistema. Notar que esta frecuencia disminuye al disminuir la constante de amortiguación c.

Hasta ahora hemos considerado vibraciones libres, porque sólo actúan fuerzas internas al sistema. Si una fuerza $F(t)$ actúa sobre la carreta, la ecuación será:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + \kappa x = F(t) \tag{4}$$

(e) Si esta fuerza es periódica de la forma $F(t) = F_0 \cos \omega t$, con F_0, ω constantes, hallar $x(t)$. Al valor $\omega/2\pi$ se lo llama frecuencia impresa al sistema. Si $\tan \phi = \frac{\omega c}{\kappa - \omega^2 M}$, probar que la solución general de (4), con $F(t) = F_0 \cos \omega t$ puede escribirse:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-bt}(C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \mathrm{sen}(\alpha t)) + \frac{F_0}{\sqrt{(\kappa - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}} \cos(\omega t - \phi) \tag{5}$$

El primer término tiende a cero para $t \to +\infty$, luego es "transitorio", es decir, a medida que pasa el tiempo, la solución se parece más y más al segundo sumando. Notar que la frecuencia de esta función es la frecuencia impresa al sistema, y que la amplitud es el coeficiente $\dfrac{F_0}{\sqrt{(\kappa - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}}$. ¿Qué pasa cuando la frecuencia impresa se acerca a la frecuencia natural del sistema? (Este fenómeno se conoce con el nombre de resonancia).

(f) Si $b < a$ (caso subamortiguado) hallar la frecuencia impresa ω que provoca amplitud máxima. ¿Siempre existe este valor? Este valor de frecuencia impresa (cuando existe) se denomina frecuencia de resonancia. Demostrar que la frecuencia de resonancia es siempre menor que la frecuencia natural.