Análisis II - Matemática 3

Práctica 2 - Integrales triples

1. Calcular:

   (a) $\int_C (xyz + x^2y^2z^2)\, dV$, donde $C = [0,1] \times [-3,2] \times [-1,1]$.

   (b) $\int_C (x\cos z + y\cos x + z\cos y)\, dV$, donde $C = [0,\pi]^3$

2. Calcular el volumen de una esfera de radio r.

3. Calcular:

   (a) $\int_W x\, dV$, donde W es la región limitada por, $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, $z = x^2 + y^2$.

   (b) $\int_W x^2 \cos z\, dV$, donde W es la región limitada por, $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $x = 0$, $x + y = 1$.

   (c) $\int_W dV$, donde W es la región limitada por, $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 9 - x^2$.

   (d) $\int_W (x + y + z)\, dV$, donde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| \leq 1\}$.

   (e) $\int_W (x^3 + y + z)\, dV$, donde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,1], x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. Calcular $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x+y}^{x^2+y^2} dzdydx$ y dibujar la región de integración.

5. Cambiar el orden de integración en

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x,y,z)\, dzdydx$$

   para obtener otras cinco formas de realizar la misma integración. Dibujar la región de integración.

6. Sea B la bola unitaria (o sea $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| \leq 1\}$). Demostrar que si f es una función continua en B, impar respecto de z (es decir $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$), entonces $\int_B f(x,y,z)\, dV = 0$. ¿Para que otras regiones vale este resultado? (dar ejemplos).

7. Sea W la región determinada por las condiciones $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq z \leq xy$.

   (a) Hallar el volumen de W

   (b) Calcular $\displaystyle\int_W x\, dxdydz$

   (c) Calcular $\displaystyle\int_W y\, dxdydz$

   (d) Calcular $\displaystyle\int_W z\, dxdydz$

   (e) Calcular $\displaystyle\int_W xy\, dxdydz$

Aplicaciones de la integral múltiple

8. Hallar el promedio de $f(x,y) = y \operatorname{sen} xy$ sobre $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

9. Hallar el centro de masa de un triángulo con densidad constante.

10. Hallar el centro de masa de la región entre $y = x^2$ y $y = x$ si la densidad es $x + y$.

11. Una placa de oro grabada ocupa el rectángulo definido por $0 \leq x \leq 2\pi$ y $0 \leq y \leq \pi$ (donde x e y se miden en cm) y tiene una densidad de masa $\rho(x,y) = y^2(\operatorname{sen} 4x + 2)^2$ gramos por centímetro cuadrado. Si el oro cuesta \$7 por gramo, ¿cuánto vale el oro de toda la placa?

12. En el ejercicio anterior, ¿cuál es la densidad de masa promedio en gramos por centímetro cuadrado?

13. (a) Hallar la masa de la caja $[0, \frac{1}{2}] \times [0,1] \times [0,2]$ suponiendo que la densidad es constante $(= \rho)$.

    (b) Lo mismo que en la parte (a) pero suponiendo ahora que la densidad está dada por $\rho(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z + 1$.

14. Hallar el centro de masa de la región acotada por $x+y+z = 2$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

15. El campo gravitatorio en un punto (x,y,z) del espacio (es decir, la fuerza gravitatoria que aparecerá por unidad de masa puntual colocada en ese punto) debido a un objeto que ocupa una región Ω con una densidad de masa $\rho(x,y,z)$ está dada por:

$$G(x,y,z) = \int_\Omega \frac{(u-x, v-y, w-z)}{((u-x)^2 + (v-y)^2 + (w-z)^2)^{\frac{3}{2}}} \rho(u,v,w)\, dudvdw$$

    Demostrar que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\|G(x,y,z)\|}{\frac{m}{r^2}} = 1$$

siendo m la masa total del objeto y $r = \|(x, y, z)\|$. Analizar el significado.

16. Una placa rectangular uniforme de acero, de lados a y b, gira alrededor de su centro de gravedad (que suponemos en $(0,0)$) con velocidad angular constante ω.

    (a) Analizar y justificar la fórmula para la energía cinética:

    $$E.C. = \int_R \rho \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)\, dxdy$$

    siendo R el rectángulo $[-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2]$ que describe la placa.

    (b) Calcular la energía cinética en términos de ρ, ω, a y b.