Segundo cuat. 2004

Análisis II - Matemática 3

Práctica 4 bis - Teorema de Green

1. Verificar el teorema de Green para el disco D con centro $(0,0)$ y radio R y las siguientes funciones:

   (a) $P(x,y) = xy^2,\ Q(x,y) = -yx^2$,

   (b) $P(x,y) = 2y,\ Q(x,y) = x$.

2. Verificar el teorema de Green y calcular $\int_C y^2\,dx + x\,dy$, siendo C la curva recorrida en sentido positivo:

   (a) cuadrado con vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$,

   (b) elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

   (c) $C = C_1 \cup C_2$, donde $C_1 :\ y = x$, $x \in [0,1]$, y $C_2 :\ y = x^2$, $x \in [0,1]$.

3. Usando el teorema de Green, hallar el área de:

   (a) el disco D con centro $(0,0)$ y radio R,

   (b) la región dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4. Sea D la región encerrada por el eje x y el arco de la cicloide:

$$x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

   Usando el teorema de Green, calcular el área de D.

5. Probar la fórmula de integración por partes: Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio elemental, ∂D su frontera orientada en sentido antihorario y $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normal exterior a D, entonces

$$\int_D u\,v_x\,dx\,dy = -\int_D u_x\,v\,dx\,dy + \int_{\partial D} u\,v\,n_1\,ds,$$

   para todo par de funciones $u,\ v \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$.

6. (a) Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitacional

$$\mathbf{F} = -GmM\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

   cuando el punto de aplicación de $\mathbf{F}$ se desplaza de $(1,1,1)$ a $(2,2,2)$ a lo largo de

i. el segmento que une los dos puntos,

ii. una poligonal formada por aristas paralelas a los ejes el cubo del cual $(1,1,1)$ y $(2,2,2)$ son vértices opuestos diagonalmente.

(b) Comprobar que la integral curvilínea sólo depende de los puntos inicial y final. Calcular $\nabla \times \mathbf{F}$ y hallar una función potencial $f : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}$ para $\mathbf{F}$.

7. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F}$ en el plano es el gradiente de una función escalar f. Si existe dicha f, hallarla.

(a) $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$

(b) $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 + y^2, 2xy)$

(c) $\mathbf{F}(x,y) = (\cos xy - xy \sin xy, x^2 \sin xy)$

8. Evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde

(a) $\mathbf{F} = (2xyz + \operatorname{sen} x, x^2 z, x^2 y)$, y C es la curva que está parametrizada por $(\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$, $0 \le t \le \pi$.

(b) $\mathbf{F} = (\cos xy^2 - xy^2 \sin xy^2, -2x^2 y \sin xy^2, 0)$, y C es la curva $(e^t, e^{t+1}, 0)$, $-1 \le t \le 0$.