1er cuat. 2004

Análisis II - Matemática 3

Práctica 4 - Integrales sobre trayectorias

1. Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las trayectorias siguientes en el valor especificado de t.

   (a) $\mathbf{r}(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t = 0$

   (b) $\sigma(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t), \quad t = 0$

   (c) $\sigma(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}}), \quad t = 1$

   (d) $\sigma(t) = (0, 0, t), \quad t = 1$

2. ¿Qué fuerza actúa en el ejercicio 1. (a), sobre una partícula de masa m en $t = 0$ si sigue la trayectoria dada?

3. Suponer que una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que sale por una tangente en $t = 1$. Hallar la ubicación de la partícula en $t = 2$. Suponer que ninguna fuerza actúa sobre ella después del tiempo $t = 1$.

4. Considerar el punto con función de posición $\sigma : t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Hallar la velocidad, rapidez, y la longitud de arco entre los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(2\pi)$. Observar que σ describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando; su curva se conoce como cicloide.

5. Calcular la longitud de arco de la curva $\sigma(t)$ en el intervalo $[a, b]$, siendo:

   (a) $\sigma(t) = (t, t^2) \quad a = 0, \quad b = 1$ (b) $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t + 1, t) \quad a = 10 \quad b = 20.$

6. La longitud de arco $s(t)$ para una trayectoria dada $\sigma(t)$, definida por $s(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\|\, d\tau$, representa la distancia que una partícula viajando por la trayectoria σ habrá recorrido en el tiempo t si comienza en el instante a, es decir, da la longitud de σ entre $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$. Encontrar las funciones longitud de arco para las curvas $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$ y $\boldsymbol{\beta}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, con $a = 0$.

7. (a) Sea $\boldsymbol{\alpha}$ cualquier trayectoria diferenciable cuya velocidad nunca es cero. Sea $s(t)$ la función longitud de arco para $\boldsymbol{\alpha}$. Sea $t(s)$ la función inversa de $s(t)$. Probar que la curva $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \circ t$ tiene velocidad unitaria, es decir, $\|\boldsymbol{\beta}'(s)\| = 1\, \forall s$.

   (b) Sea σ la trayectoria $\sigma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, $t > 0$. Encontrar una trayectoria que trace la misma curva que σ pero con velocidad unitaria.

8. Evaluar las siguientes integrales de trayectorias $\int_\sigma f(x,y,z)\,ds$, donde

   (a) $f(x,y,z) = x+y+z, \quad \sigma : t \mapsto (\sin t, \cos t, t), \quad t \in [0, 2\pi]$.

   (b) $f(x,y,z) = \cos z, \quad \sigma$ como en la parte (a).

   (c) $f(x,y,z) = x\cos z, \quad \sigma : t \mapsto (t, t^2, 0), \quad t \in [0,1]$.

9. (a) Mostrar que la integral de trayectoria de $f(x,y)$ a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es

   $$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

   (b) Calcular la longitud de arco de $r = 1+\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

10. Sea $f(x,y) = 2x - y$, $x = t^4$, $y = t^4$, $-1 \leq t \leq 1$. Calcular la integral de f a lo largo de esta trayectoria e interpretar geométricamente la respuesta.

11. Suponer que el semicírculo parametrizado por:

    $$\sigma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \theta \mapsto (0, a\sin\theta, a\cos\theta),\ a > 0,$$

    está hecho de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

    (a) ¿Cuál es la masa total del alambre?

    (b) ¿Dónde está el centro de masa de esta configuración de alambre?

12. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, sea la longitud de la gráfica de f en $[a,b]$ definida como la longitud de la trayectoria $t \to (t, f(t))$ para $t \in [a,b]$.

    (a) Mostrar que la longitud de la gráfica de f en [a,b] es

    $$\int_b^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

    (b) Hallar la longitud de la gráfica de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

13. Hallar la masa de un alambre que sigue la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ y el plano $x+y-z = 0$ si la densidad de masa es $\rho(x,y,z) = y^2$ gramos por unidad de longitud.

14. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de cada una de las trayectorias siguientes:

    (a) $\sigma(t) = (t,t,t), \quad 0 \leq t \leq 1$.

    (b) $\sigma(t) = (\sin t, 0, \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

15. Evaluar cada una de las integrales siguientes:

    (a) $\displaystyle\int_\sigma x\,dy - y\,dx, \quad \sigma(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$

    (b) $\displaystyle\int_\sigma x\,dx + y\,dy, \quad \sigma(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t), \quad 0 \le t \le 2.$

16. Considerar la fuerza $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.

17. Sea σ una trayectoria suave.

    (a) Suponer que $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$. Mostrar que

    $$\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

    (b) Si $\mathbf{F}$ es paralelo a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$, mostrar que

    $$\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\sigma \|\mathbf{F}\|\, ds.$$

    (Por paralelo a $\sigma'(t)$ se entiende que $\mathbf{F}(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$, donde $\lambda(t) > 0$.)

18. ¿Cuál es el valor de la integral de un campo gradiente alrededor de una curva cerrada C?

19. Suponer que $\nabla f(x,y,z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$. Si $f(0,0,0) = 5$, hallar $f(1,1,2)$.

20. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido (para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$) por:

    $$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z).$$

    Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1,y_1,z_1) a (x_2,y_2,z_2), a lo largo de cualquier trayectoria, depende sólo de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$.

21. Para los siguientes campos vectoriales $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

    (a) Demuestre que es un campo conservativo.

    (b) Determine una función potencial de F.

    (c) Calcule la integral de línea de F a lo largo de alguna curva, la que quieran, que una el origen con el punto P indicado.

i) $F(x,y) = (2xy^3 + y + 1, 3x^2y^2 + x + 7)$, $\quad P = (1,1)$.
ii) $F(x,y) = (y^2 e^{x+y} + 1, ye^{x+y}(y+2) + 1)$, $\quad P = (1,1)$.
iii) $F(x,y,z) = (2xy^3z, 3x^2y^2z, x^2y^3)$, $\quad P = (1,1,1)$.
iv) $F(x,y,z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$, $\quad P = (1,1,1)$.

22. Calcular

$$a) \quad \int_{(1,0)}^{(3,2)} 2xy\,dx + x^2\,dy \qquad\qquad b) \quad \int_{(0,0,0)}^{(3,-2,5)} 3x\,dx + y^3\,dy - z^2\,dz$$

¿Por qué en ninguno de los dos casos se da una curva que una los extremos de integración? Justificar.

23. Calcular la integral de línea del campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x,y,z) = \left(e^{xz}(xyz^2 + yz), xze^{xz}, e^{xz}(x^2yz + xy)\right)$$

a lo largo de la curva $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\sigma(t) = \left(\frac{\operatorname{senh} 5t}{\operatorname{senh} 5}, t^4 + 5t^3 - 3t^2 - 2t, \frac{1}{\ln 7}\ln\left(1 + 6t^8\right)\right)$$

24. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 definida en $\mathbb{R}$. Demuestre que

$$\int_C f(x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0$$

donde C es cualquier curva cerrada.