1er cuat. 2004

Análisis II - Matemática 3

Práctica 5 - Integrales sobre superficies

1. Para cada una de las siguientes superficies dadas en coordenadas esféricas por:

$$a)\, r = k \quad (k = cte,\ k > 0) \qquad b)\, \varphi = k \quad (k = cte,\ 0 < k < \pi/2)$$

   Dar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas, graficarla y hallar un vector normal en cada punto.

2. (a) Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\Phi_1(u, v) = (u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}) \quad \Phi_2(u, v) = (au\cos(v), bu\sin(v), u^2)$$

   son dos parametrizaciones del paraboloide elíptico.

   (b) Mostrar que

$$\Phi(u, v) = ((a + b\cos(u))\sin(v), (a + b\cos(u))\cos(v), b\sin(u))$$

   $0 < b < a$, y $u, v \in [0, 2\pi]$, es una parametrización del toro.

3. Considerar la superficie

$$x = u\cos(v) \qquad y = u\sin(v) \qquad z = u$$

   ¿Es diferenciable esta superficie? ¿Es suave?

4. Si la superficie es el gráfico de una función diferenciable $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, demostrar que se trata de una superficie suave. ¿Qué pasa si g no es diferenciable ?

5. Encontrar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto especificado

   (a) $x = 2u$, $y = u^2 + v$, $z = v^2$ en el punto $(0, 1, 1)$.

   (b) $x = u^2 - v^2$, $y = u + v$, $z = u^2 + 4v$ en el punto $(-1/4, 1/2, 2)$.

6. Encontrar una fórmula para el plano tangente a la superficie $x = h(y, z)$ en el punto $(h(y_0, z_0), y_0, z_0)$

7. Sea $\phi(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta) \qquad z = \theta$$

   Graficar. Hallar el vector normal en cada punto y por último hallar su área.

8. Sea $\phi(u,v) : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$$\phi(u,v) = (u - v, u + v, uv)$$

Calcular su área.

9. Calcular el área de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$. (Bóveda de Viviani).

10. Sea la curva $z = f(x)$ $x \in [\alpha, \beta]$ con f y α positivos, girada alrededor del eje z. Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio 2 item (a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$, y $a = b = 1$.

11. Calcular $\int_S xy\ dS$ donde S es el borde del tetraedro con lados $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $x = y$.

12. Calcular $\int_S (x + y + z) dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir $S = \{(x,y,z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

13. Hallar la masa de una superficie esférica de radio r tal que en cada punto $(x,y,z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia entre (x,y,z) y el punto (0,0,1).

14. Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la superficie del cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

15. Sea la temperatura de un punto de $\mathbb{R}^3$ dada por la función $T(x,y,z) = 3x^2 + 3z^2$ calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo $-\nabla T$) a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, orientada de forma que la normal en el punto $(0, 0, \sqrt{2})$ sea (0,0,1).

16. Sea S la superficie de la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r \sin(\phi)\, d\phi\, d\theta$$

17. Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ con $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$.

18. Sean S una superficie y C una curva cerrada que es el borde de S. Verificar que si $\mathbf{F}$ es un campo gradiente ($\mathbf{F} = \nabla f$) entonces

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

19. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x^2, yx^2)$ que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.