Segundo Cuatrimestre 2004

Análisis II - Matemática 3

Práctica 6 - Teoremas de Stokes y Gauss

1. Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$, y el campo vectorial radial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

2. Sea S la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies S_1 y S_2; donde S_1 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ y S_2 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \geq 1$. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.

3. (a) Considerar dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S. Describir, mediante dibujos, como deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

   (b) Deducir que si S es una superficie cerrada, entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

   (una superficie cerrada es aquella que constituye la frontera de una región en el espacio; así, por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada).

   (c) Calcular $\displaystyle\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, y $\mathbf{F} = (\operatorname{sen} xy, e^x, -yz)$.

4. Verificar el teorema de Stokes para la helicoide $\Phi(r, \theta) = (r \cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta)$, $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, \pi/2]$ y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y)$

5. Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo $\mathbf{F} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ y la superficie S, siendo

   (a) $S =$ círculo de radio $a > 0$ en el plano $z = 0$.

   (b) $S =$ región del plano $z = 0$ entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x + y = 1$.

6. (a) Rehacer el ejercicio 14 de la práctica 5, usando el teorema de Gauss.

   (b) Idem (a), pero con el ejercicio 12 de la misma práctica.

7. Verificar el teorema de la divergencia para $\mathbf{F} = (x, y, z)$ y Ω el sólido intersección de $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

8. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, siendo $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ y S la superficie interior de la esfera de radio R. (Sugerencia: usar el teorema de Gauss)

9. Rehacer el ejercicio 8 (b) de esta práctica usando el teorema de Gauss.

10. Usando el teorema de Gauss, probar las *identidades de Green*:

$$\int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} (f\Delta g - \nabla f \cdot \nabla g)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\int_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)\, dx\, dy\, dz.$$

Aquí $\mathbf{n}$ es la normal exterior al dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, y f, g son de clase C^2.

11. Sea $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2,\ -H \leq z \leq H\}$ la superficie cuya cara positiva es la que puede verse desde el punto $(0, 0, 0)$. Sea $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.