ANALISIS II - Primer Parcial (23/10/04)

PARTE TEORICA - SOLUCIONES

1. Analizar las siguientes afirmaciones. Decidir si son Verdaderas o Falsas. Si son Verdaderas, justificar con una frase. Si son falsas, dar un contraejemplo.

   Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donde D es un conjunto abierto, convexo y acotado.

   Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donde U es un conjunto abierto, convexo y acotado, $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

   (a) Si f es C^1 en un conjunto abierto V que contiene a $D \cup \partial D$, entonces f es integrable en D.
   VERDADERO, ya que si es C^1 entonces es continua, y se sabe que continua implica integrable.

   (b) Si f es C^1, y C es una curva suave, $C \subset D$, que une los puntos A y B, entonces

   $$\int_C \nabla f = f(B) - f(A)$$

   VERDADERO: Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, tal que $\alpha(a) = A, \alpha(b) = B$ y $\alpha([a, b]) = C$. Sea $\varphi(t) = f(\alpha(t))$. Entonces $\varphi'(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$ y eso implica que

   $$\int_C \nabla f = \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = \int_a^b \varphi'(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a) = f(B) - f(A)$$

   como queríamos ver.

   (c) Si F es C^1, y ϕ y ψ son dos funciones C^1, tales que $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ satisfacen que $\phi(U) = \phi(V) = S$, donde U y V son rectángulos en $\mathbb{R}^2$, entonces

   $$\iint_S F \cdot (\phi_u \times \phi_v)dS = \iint_S F \cdot (\psi_u \times \psi_v)dS.$$

   FALSO. Ejemplo: $F(x, y, z) = (x, y, z)$, $\phi(u, v) = (u, v, 1)$, $\psi(u, v) = (-u, v, 1)$, $U = [-1, 1] \times [0, 1] = V$. La normal a S *que apunta hacia arriba* es $(0, 0, 1) = \phi_u \times \phi_v = -(\psi_u \times \psi_v)$. Entonces

   $$\iint_S F \cdot (\phi_u \times \phi_v)dS = \iint_U 1dudv = -\iint_V (-1)dudv = -\iint_S F \cdot (\psi_u \times \psi_v)dS.$$

2. Sean $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $T(u,v) = (u^2, 2u+v)$ y $\phi(u,v) = (2u-v, 2u+v)$ y sean $R = [-1,1] \times [-1,1]$, y $D = T(R)$, $U = [-2,1] \times [-1,2]$, y $V = \phi(U)$. Es cierto que

   (a)
   $$\iint_D f(x,y)dx\, dy = \iint_R f(T(u,v))2u du\, dv$$
   (Justifique su respuesta!).

   FALSO La función T no es 1 a 1.

   (b)
   $$\iint_V f(x,y)dx\, dy = \iint_U f(\phi(u,v))4du\, dv$$
   (Justifique su respuesta!).

   VERDADERO La función ϕ es 1 a 1 y $|J(\phi)| = 4$ entonces por el teorema de cambio de variables, sabemos que
   $$\iint_V f(x,y)dx\, dy = \iint_U f(\phi(u,v))4du\, dv$$
   que es lo que queriamos ver.

3. Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donde $D = \{(x,y) : \frac{1}{9} \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$, $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ satisface que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en D. Además se sabe que $\int_C F = 2\pi$, si C es el círculo de radio $\frac{1}{2}$ alrededor del origen, orientado en contra de las agujas del reloj. Decir cuánto valen (y justificar) las siguientes integrales de línea, ambas tomadas en el sentido contrario a las agujas del reloj.

   (a)
   $$\int_{x^2+y^2=1} F$$
   Sea $T = \{\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$. Entonces, $T \subset D$ y por lo tanto F satisface que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en T, entonces puedo aplicar el Teorema de Green generalizado. Entonces:
   $$\int_{x^2+y^2=1} F - \int_{x^2+y^2=\frac{1}{4}} F = \iint_T \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$
   y entonces
   $$\int_{x^2+y^2=1} F = 2\pi.$$

   (b)
   $$\int_{(x-3)^2+y^2=\frac{1}{16}} F$$
   En este caso, el círculo $(x-3)^2 + y^2 = \frac{1}{16}$ está contenido en D, por lo tanto puedo aplicar Green directamente para obtener:
   $$\int_{(x-3)^2+y^2=\frac{1}{16}} F = 0.$$