

Análisis II - Matemática 3

PRÁCTICA 1 - INTEGRALES DOBLES

1. Evaluar cada una de las integrales siguientes si $R = [0, 1] \times [0, 1]$:

(a) $\int_R (x^3 + y^2) dx dy$

(b) $\int_R ye^{xy} dx dy$

(c) $\int_R (xy)^2 \cos x^3 dx dy$

(d) $\int_R \ln[(x+1)(y+1)] dx dy$

(e) $\int_R (x^m y^n) dx dy$, donde $m, n > 0$

(f) $\int_R (ax + by + c) dx dy$

(g) $\int_R \sin(x+y) dx dy$

(h) $\int_R (x^2 + 2xy + yx^{1/2}) dx dy$

2. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz , el plano yz , el plano xy , los planos $x = 1$ y $y = 1$, y la superficie $z = x^2 + y^4$.

3. Sean f continua en $[a, b]$ y g continua en $[c, d]$. Mostrar que

$$\int_R [f(x)g(y)] dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy$$

donde $R = [a, b] \times [c, d]$.

4. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z = \sin y$, los planos $x = 1, x = 0, y = 0, y = \pi/2$ y el plano xy .

5. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2]$ y los "lados verticales" de R .

6. Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y, & \text{si } x \text{ no es racional} \end{cases}$$

Mostrar que la integral iterada $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$ existe pero f no es integrable. ¿Existe la otra integral iterada?

7. Sean $F \in \mathcal{C}^2$ y $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$. Calcular $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$ en términos de F .

8. Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones D determinadas por los límites de integración:

(a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx$

(b) $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy dx$

(c) $\int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y) dy dx$

(d) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y dy dx$

(e) $\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2+y) dx dy$

(f) $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx$

(g) $\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy dx$

(h) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \sin x dy dx$

(i) $\int_0^1 \int_{y^2}^y (x^n + y^m) dx dy \quad (m, n > 0)$

(j) $\int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x dy dx$

(k) $\int_0^\pi \int_0^{\sin y} y dx dy$

(l) $\int_{-2}^0 \int_{x^3}^{x+1} (y^2+1) dy dx$

9. Usar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r y el área de una elipse con semiejes de longitud a y b .

10. Calcular

$$\int_T (x \sin x + y \sin(x+y)) dx dy$$

siendo T el triángulo de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(3, 3)$.

11. Sea D la región acotada por los semiejes positivos de x e y y la recta $3x+4y=10$. Calcular

$$\int_D (x^2 + y^2) dx dy$$

12. Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$. Calcular

$$\int_D x^3 y dx dy$$

13. Calcular el volumen de un cono de base de radio r y altura h .

14. Calcular el volumen de las siguientes regiones:

- (a) R : encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.

- (b) R : encerrada por el cono de altura 4 dado por $z^2 = x^2 + y^2$.
 (c) R : encerrada por las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
 (d) R : elipsoide con semiejes a, b y c .
 (e) R : determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$ y $z \geq 2$.
15. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, dibujar las regiones correspondientes y evaluar la integral por los dos caminos.

$$(a) \int_0^1 \int_x^1 xy \, dy \, dx \quad (b) \int_0^1 \int_{2-y}^1 (x+y)^2 \, dx \, dy$$

$$(c) \int_0^1 \int_{2x}^{3x} x^2 y \, dy \, dx \quad (d) \int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2 \, dx \, dy$$

$$(e) \int_{-3}^3 \int_{-(9-y^2)^{1/2}}^{(9-y^2)^{1/2}} x^2 \, dx \, dy$$

16. Calcular $\int_D y^2 x^{1/2} \, dx \, dy$ donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > x^2, y < 10 - x^2\}$$

17. Calcular $\int_T e^{x-y} \, dx \, dy$ donde T es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 3)$, y $(2, 2)$.

18. Teniendo en cuenta que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s) \, ds$$

y

$$f'(s) = f'(0) + \int_0^s f''(t) \, dt$$

se tiene

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x \int_0^s f''(t) \, dt \, ds$$

cambiar el orden de integración para demostrar que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x f''(t)(x-t) \, dt$$

Usando la misma idea demostrar la fórmula general:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt$$

19. Supongamos que $P_i = (x_i, y_i)$ es una sucesión de puntos tomados al azar con distribución uniforme en el cuadrado $C = [0, 1] \times [0, 1]$ (ver Nota 1). Demostrar que si $f(x, y)$ es una función continua en C entonces,

$$\int_C f(x, y) \, dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)$$

Nota 1: Con esto queremos decir que la fracción de puntos que caen dentro de un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] \subset C$ es precisamente la fracción del área que este rectángulo ocupa. Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N^0\{P_i : P_i \in R, i \leq n\}}{n} = (b - a)(d - c)$$

Nota 2: Esta metodología para aproximar integrales esta dentro de lo que se conoce como “métodos de Montecarlo”.