

Análisis II - Matemática 3

PRÁCTICA 4 - INTEGRALES SOBRE TRAYECTORIAS

- Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las trayectorias siguientes en el valor especificado de t .
 - $\mathbf{r}(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t = 0$
 - $\sigma(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t), \quad t = 0$
 - $\sigma(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}}), \quad t = 1$
 - $\sigma(t) = (0, 0, t), \quad t = 1$
- ¿Qué fuerza actúa en el ejercicio 1. (a), sobre una partícula de masa m en $t = 0$ si sigue la trayectoria dada?
- Suponer que una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que sale por una tangente en $t = 1$. Hallar la ubicación de la partícula en $t = 2$. Suponer que ninguna fuerza actúa sobre ella después del tiempo $t = 1$.
- Considerar el punto con función de posición $\sigma : t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Hallar la velocidad, rapidez, y la longitud de arco entre los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(2\pi)$. Observar que σ describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando; su curva se conoce como cicloide.
- Calcular la longitud de arco de la curva $\sigma(t)$ en el intervalo $[a, b]$, siendo:
 - $\sigma(t) = (t, t^2) \quad a = 0, \quad b = 1$
 - $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t + 1, t) \quad a = 10 \quad b = 20$.
- La longitud de arco $s(t)$ para una trayectoria dada $\sigma(t)$, definida por $s(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau$, representa la distancia que una partícula viajando por la trayectoria σ habrá recorrido en el tiempo t si comienza en el instante a , es decir, da la longitud de σ entre $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$. Encontrar las funciones longitud de arco para las curvas $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$ y $\beta(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, con $a = 0$.
- Sea α cualquier trayectoria diferenciable cuya velocidad nunca es cero. Sea $s(t)$ la función longitud de arco para α . Sea $t(s)$ la función inversa de $s(t)$. Probar que la curva $\beta = \alpha \circ t$ tiene velocidad unitaria, es decir, $\|\beta'(s)\| = 1 \forall s$.
 - Sea σ la trayectoria $\sigma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt), \quad t > 0$. Encontrar una trayectoria que trace la misma curva que σ pero con velocidad unitaria.

8. Evaluar las siguientes integrales de trayectorias $\int_{\sigma} f(x, y, z) ds$, donde

(a) $f(x, y, z) = x + y + z$, $\sigma : t \mapsto (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $f(x, y, z) = \cos z$, σ como en la parte (a).

(c) $f(x, y, z) = x \cos z$, $\sigma : t \mapsto (t, t^2, 0)$, $t \in [0, 1]$.

9. (a) Mostrar que la integral de trayectoria de $f(x, y)$ a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

(b) Calcular la longitud de arco de $r = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

10. Sea $f(x, y) = 2x - y$, $x = t^4$, $y = t^4$, $-1 \leq t \leq 1$. Calcular la integral de f a lo largo de esta trayectoria e interpretar geométicamente la respuesta.

11. Suponer que el semicírculo parametrizado por:

$$\sigma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \theta \mapsto (0, a \sin \theta, a \cos \theta), a > 0,$$

está hecho de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

(a) ¿Cuál es la masa total del alambre?

(b) ¿Dónde está el centro de masa de esta configuración de alambre?

12. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, sea la longitud de la gráfica de f en $[a, b]$ definida como la longitud de la trayectoria $t \rightarrow (t, f(t))$ para $t \in [a, b]$.

(a) Mostrar que la longitud de la gráfica de f en $[a, b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

(b) Hallar la longitud de la gráfica de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

13. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de cada una de las trayectorias siguientes:

(a) $\sigma(t) = (t, t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

(b) $\sigma(t) = (\sin t, 0, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

14. Evaluar cada una de las integrales siguientes:

- (a) $\int_{\sigma} x dy - y dx, \quad \sigma(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
- (b) $\int_{\sigma} x dx + y dy, \quad \sigma(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t), \quad 0 \leq t \leq 2.$
15. Considerar la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2, z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.
16. Sea σ una trayectoria suave.

(a) Suponer que $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$. Mostrar que

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

(b) Si $\mathbf{F}$ es paralelo a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$, mostrar que

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma} \|\mathbf{F}\| ds.$$

(Por paralelo a $\sigma'(t)$ se entiende que $\mathbf{F}(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$, donde $\lambda(t) > 0$.)

17. ¿Cuál es el valor de la integral de un campo gradiente alrededor de una curva cerrada C ?
18. Suponer que $\nabla f(x, y, z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$. Si $f(0, 0, 0) = 5$, hallar $f(1, 1, 2)$.
19. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido (para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$) por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z).$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) , a lo largo de cualquier trayectoria, depende sólo de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.