Análisis II - Matemática 3

Práctica 9 - Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

1. Dado el sistema $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$, encontrar todas las condiciones iniciales (a_1, a_2) tales que la solución $(x_1(t), x_2(t))$ que verifica $\begin{cases} x_1(0) = a_1 \\ x_2(0) = a_2 \end{cases}$ tienda a cero para $t \to \infty$.

2. Considerar los sistemas:

$$(A) \quad \begin{cases} y_1' = y_1 + \epsilon y_2 \\ y_2' = \epsilon y_1 + y_2 \end{cases} \qquad \epsilon > 0$$
$$(B) \quad \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_2 \end{cases}$$

   i) Hallar todas las soluciones de (A) y de (B).
   ii) Sea $y = (y_1, y_2)$ la solución de (A) que verifica la condición inicial $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 \end{cases}$.
   Sea $z = ((z_1, z_2)$ la solución de (B) que verifica la misma condición inicial. Estimar $\|y(t) - z(t)\|$ y comprobar que las soluciones de (B) aproximan las correspondientes soluciones de (A) cuando $\epsilon \to 0$.

3. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = 2x - 4y \\ y' = 2x + ay \end{cases}$$

   Hallar todos los valores de a tal que todas las soluciones sean funciones periódicas.

4. (Un modelo de especies que compiten por su supervivencia)
   Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 \\ x_2' = -2x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

   que describe la interacción de dos poblaciones que compiten en sus respectivas tasas de crecimiento (cuantos más individuos de una de ellas hay, menos crece la población de la otra).
   a) Supongamos que las poblaciones iniciales son $x_1(0) = 90, x_2(0) = 150$.
      i) Determinar las poblaciones de ambas especies $\forall t > 0$
      ii) Comprobar que la segunda especie será eliminada luego de 11 meses (aún

cuando comenzó con una población mayor)
b) Mostrar que si el vector inicial es $x(0) = (a, 2a),\ a \in \mathbf{R}$, ambas poblaciones crecen a una tasa proporcional a $\exp(t)$.
c) Si $x_2(0) > 2x_1(0)$, mostrar que es la primera especie la que resulta eliminada.

5. (Un modelo de predador – presa)
Consideremos el siguiente sistema donde la especie 1 es la presa y la 2 el predador:
$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + 4x_2 \end{cases}$$
i) Encontrar las poblaciones de ambas especies para $t > 0$ si las poblaciones iniciales son $x_1(0) = 500,\ x_2(0) = 100$ y probar que la especie 1 desaparecerá en 10 meses.
ii) Probar que cualesquiera sean las condiciones iniciales $(x_1(0), x_2(0))$ $(\neq (0,0))$, la primera especie se extinguirá en α años, con $\alpha = \frac{x_1(0)}{x_1(0)+x_2(0)}$ (menos de un año).

6. (Un modelo de cooperación de especies)
Consideremos el modelo simbiótico gobernado por el sistema:
$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 4x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$
(notar que en este modelo, la población de cada especie crece proporcionalmente a la población de la otra, y decrece proporcionalmente a su propia población). Supongamos que $x_1(0) = 100,\ x_2(0) = 300$. Probar que para $t \to +\infty$, las dos especies cooperativas se aproximan a las poblaciones de "equilibrio" 350 y 175 respectivamente (ninguna población es eliminada).

7. Un modelo matemático para una carrera armamentista entre dos países cuyos gastos de defensa están expresados por las variables $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente está dado por :
$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) - x(t) + a \\ y'(t) = 4x(t) - 3y(t) + b \end{cases}$$
donde a y b son constantes que miden la confianza o desconfianza que cada país tiene en el otro. Sabiendo que inicialmente $x(0) = 1$ e $y(0) = 4$ determinar si para algún valor de a y b habrá desarme (x e y tienden a 0 cuando $t \to \infty$).

8. a) Demuestre que $\begin{cases} x = 2\exp(4t) \\ y = 3\exp(4t) \end{cases}$ y $\begin{cases} x = \exp(-t) \\ y = -\exp(-t) \end{cases}$ son soluciones linealmente independientes del sistema lineal homogéneo:
$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$$

y escriba la solución general de este sistema.

b) Demuestre que $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -2t + 3 \end{cases}$ es una solución particular del sistema no homogéneo:

$$\begin{cases} x' = x + 2y + t - 1 \\ y' = 3x + 2y - 5t - 2 \end{cases}$$

y escriba la solución general de este sistema.

c) Encontrar la solución del sistema de b) tal que: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

9. Encontrar la solución de $\begin{cases} x' = x + 3y + t \\ y' = -y - \operatorname{sen}(t) \end{cases}$

   i) que verifique $\begin{cases} x(1) = 2 \\ y(1) = 7 \end{cases}$ ii) que verifique $\begin{cases} x(1) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

10. Encontrar todas las soluciones de:

$$\begin{cases} x' = y + \exp(2t) \\ y' = -4x + 4y + 1 \end{cases}$$

11. Inicialmente el tanque I contiene 100 litros de agua salada a una concentración de 1 kg por litro; el tanque II tiene 100 litros de agua pura. El líquido se bombea del tanque I al tanque II a una velocidad de 1 litro por minuto, y del tanque II al I a una velocidad de 2 litros por minuto. Los tanques se agitan constantemente. ¿ Cuál es la concentración en el tanque I después de 10 minutos?

12. Dado un campo vectorial continuo en $\mathbf{R}^2$ $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, decimos que una curva paramétrica $X(t) = (x(t), y(t))$, $t \in (t_0, t_1)$ es una línea de flujo del campo si para todo $t \in (t_0, t_1)$ $(f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t)))$ es el vector velocidad $(x'(t), y'(t))$. Esto es, si $(x(t), y(t))$ es solución del sistema de dos por dos:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

   Hallar las líneas de flujo del campo $F(x, y)$ en los siguientes casos:
   i) $F(x, y) = (x + y, x)$
   ii) $F(x, y) = (\cos^2 x, \operatorname{tg}(x) + 2)$