

# Análisis II - Matemática 3

2do cuatrimestre del 2005

## PRÁCTICA 1 - INTEGRALES DOBLES

1. Evaluar cada una de las integrales siguientes si  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ :

(a)  $\int_R (x^3 + y^2) dx dy$

(b)  $\int_R ye^{xy} dx dy$

(c)  $\int_R (xy)^2 \cos x^3 dx dy$

(d)  $\int_R \ln[(x+1)(y+1)] dx dy$

(e)  $\int_R (x^m y^n) dx dy$ , donde  $m, n > 0$

(f)  $\int_R (ax + by + c) dx dy$

(g)  $\int_R \sin(x+y) dx dy$

(h)  $\int_R (x^2 + 2xy + yx^{1/2}) dx dy$

2. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano  $xz$ , el plano  $yz$ , el plano  $xy$ , los planos  $x = 1$  y  $y = 1$ , y la superficie  $z = x^2 + y^4$ .

3. Sean  $f$  continua en  $[a, b]$  y  $g$  continua en  $[c, d]$ . Mostrar que

$$\int_R [f(x)g(y)] dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy$$

donde  $R = [a, b] \times [c, d]$ .

4. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie  $z = \sin y$ , los planos  $x = 1, x = 0, y = 0, y = \pi/2$  y el plano  $xy$ .

5. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica  $z = x^2 + y$ , el rectángulo  $R = [0, 1] \times [0, 2]$  y los "lados verticales" de  $R$ .

6. Sea  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y, & \text{si } x \text{ no es racional} \end{cases}$$

Mostrar que la integral iterada  $\int_0^1 \left[ \int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$  existe pero  $f$  no es integrable. ¿Existe la otra integral iterada?

7. Sean  $F \in \mathcal{C}^2$  y  $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$ . Calcular  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$  en términos de  $F$ .

8. Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones  $D$  determinadas por los límites de integración:

(a)  $\int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx$

(b)  $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy dx$

(c)  $\int_0^1 \int_1^{e^x} (x + y) dy dx$

(d)  $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y dy dx$

(e)  $\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2 + y) dx dy$

(f)  $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx$

(g)  $\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy dx$

(h)  $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \sin x dy dx$

(i)  $\int_0^1 \int_{y^2}^y (x^n + y^m) dx dy \quad (m, n > 0)$

(j)  $\int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x dy dx$

(k)  $\int_0^\pi \int_0^{\sin y} y dx dy$

(l)  $\int_{-2}^0 \int_{x^3}^{x+1} (y^2 + 1) dy dx$

9. Usar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio  $r$  y el área de una elipse con semiejes de longitud  $a$  y  $b$ .

10. Calcular

$$\int_T (x \sin x + y \sin(x + y)) dx dy$$

siendo  $T$  el triángulo de vértices  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(3, 3)$ .

11. Sea  $D$  la región acotada por los semiejes positivos de  $x$  e  $y$  y la recta  $3x + 4y = 10$ . Calcular

$$\int_D (x^2 + y^2) dx dy$$

12. Sea  $D$  la región acotada por el eje  $y$  y la parábola  $x = -4y^2 + 3$ . Calcular

$$\int_D x^3 y dx dy$$

13. Calcular el volumen de un cono de base de radio  $r$  y altura  $h$ .

14. Calcular el volumen de las siguientes regiones:

- (a)  $R$ : encerrada por la superficie  $z = x^2 + y^2$  y el plano  $z = 10$ .
- (b)  $R$ : encerrada por el cono de altura 4 dado por  $z^2 = x^2 + y^2$ .
- (c)  $R$ : encerrada por las superficies  $x^2 + y^2 = z$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ .
- (d)  $R$ : elipsoide con semiejes  $a, b$  y  $c$ .
- (e)  $R$ : determinada por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$  y  $z \geq 2$ .

15. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, dibujar las regiones correspondientes y evaluar la integral por los dos caminos.

$$(a) \int_0^1 \int_x^1 xy \, dy dx \qquad (b) \int_0^1 \int_{2-y}^1 (x+y)^2 \, dx dy$$

$$(c) \int_0^1 \int_{2x}^{3x} x^2 y \, dy dx \qquad (d) \int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2 \, dx dy$$

$$(e) \int_{-3}^3 \int_{-(9-y^2)^{1/2}}^{(9-y^2)^{1/2}} x^2 \, dx dy$$

16. Calcular  $\int_D y^2 x^{1/2} \, dx dy$  donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > x^2, y < 10 - x^2\}$$

17. Calcular  $\int_T e^{x-y} \, dx dy$  donde  $T$  es el triángulo con vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 3)$ , y  $(2, 2)$ .

18. Teniendo en cuenta que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s) \, ds$$

y

$$f'(s) = f'(0) + \int_0^s f''(t) \, dt$$

se tiene

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x \int_0^s f''(t) \, dt ds$$

cambiar el orden de integración para demostrar que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x f''(t)(x-t) \, dt$$

Usando la misma idea demostrar la fórmula general:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt$$