Análisis II - Matemática 3

2do cuatrimestre del 2005

Práctica 7 - Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

1. Para cada una de las ecuaciones diferenciales que siguen, encontrar la solución general y, en los casos que se indica, la solución particular que satisfaga la condición dada:

   (a) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}$ (b) $x' = \dfrac{1+x^2}{1+t^2}, \quad x(0) = 1$

   (c) $x' - 2tx = t, \quad x(1) = 0$ (d) $x' - \tan t = \cos t$

   (e) $x' - x^{1/3} = 0, \quad x(0) = 0$

   En todos los casos dar el intervalo maximal de existencia de las soluciones y decir si son únicas.

2. Si $y = y(t)$ denota el número de habitantes de una población en función del tiempo, se denomina tasa de crecimiento de la población a la función definida como el cociente y'/y.

   (a) Caracterizar (encontrar la ecuación) de las poblaciones con tasa de crecimiento constante.

   (b) Dibujar el gráfico de $y(t)$ para poblaciones con tasa de crecimiento constante, positiva y negativa.

   (c) ¿Cuáles son las poblaciones con tasa de crecimiento nula?

   (d) Una población tiene tasa de crecimiento constante. El 1 de enero de 1992 tenía 1000 individuos, y cuatro meses después tenía 1020. Estimar el número de individuos que tendrá el 1 de enero del año 2010, usando los resultados anteriores.

   (e) Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es una función lineal de t $(at + b)$.

   (f) Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es igual a $r - cy$, donde r y c son constantes positivas. Este es el llamado crecimiento logístico, en tanto que el correspondiente a tasas constantes es llamado crecimiento exponencial (por razones obvias ¿no?). Para poblaciones pequeñas, ambas formas de crecimiento son muy similares. Comprobar esta afirmación y comprobar también que en el crecimiento logístico $y(t)$ tiende asintóticamente a la recta $y = r/c$.

3. Se tiene una función continua positiva definida para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que el área comprendida entre el gráfico de f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ es proporcional a $(b - a)$ $(\forall a, b \in \mathbb{R})$. ¿Cómo es f?.

4. Si un cultivo de bacterias crece con un coeficiente de variación proporcional a la cantidad existente y se sabe además que la población se duplica en 1 hora, ¿cuánto habrá aumentado en 2 horas?

5. Verifique que las siguientes ecuaciones son homogéneas de grado cero y resuelva:

   (a) $tx' = x + 2t\exp(-x/t)$ (b) $txx' = 2x^2 - t^2$ (c) $x' = \dfrac{x+t}{t}$, $x(1) = 0$

6. Demuestre que la sustitución $y = at + bx + c$ cambia $x' = f(at + bx + c)$ en una ecuación con variables separables y aplique este método para resolver las ecuaciones siguientes:

   (a) $x' = (x+t)^2$ (b) $x' = \operatorname{sen}^2(t - x + 1)$

7. (a) Si $ae \neq bd$ demuestre que pueden elegirse constantes h, k de modo que las sustituciones $t = s - h$, $x = y - k$ reducen la ecuación:

   $$\frac{dx}{dt} = F\left(\frac{at + bx + c}{dt + ex + f}\right)$$

   a una ecuación homogénea.

   (b) Resuelva las ecuaciones:

   i. $x' = \dfrac{x+t+4}{x+t-6}$ ii. $x' = \dfrac{x+t+4}{t-x-6}$

8. Resuelva las ecuaciones siguientes:

   (a) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$ (e) $3y\,dx + x\,dy = 0$

   (c) $(3x^2 - y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0$ (d) $x\,dy = (x^5 + x^3y^2 + y)\,dx$

   (b) $\cos x \cos^2 y\,dx - 2\sin x\,\sin y \cos y\,dy = 0$

9. Si $a, b : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ son continuas,

   (a) probar:

   i. $y(x) = k\mathrm{e}^{-\int_{x_1}^{x} a(t)dt}$ $(k \in \mathbb{R})$ son todas las soluciones de

   $$y' + a(x)y \;=\; 0 \text{ en } [x_1, x_2]$$

ii. $y(x) = -e^{-\int_{x_1}^{x} a(t)dt} \displaystyle\int_{x_1}^{x} b(t) e^{\int_{x_1}^{t} a(s)ds} dt$ es una solución de

$$y' + a(x)y + b(x) = 0 \text{ en } [x_1, x_2]$$

(b) describir todas las soluciones de:

$$y' + a(x)y + b(x) = 0 \quad \text{en } [x_1, x_2]$$

(c) Comprobar que $\forall y_1 \in \mathbb{R}$ existe una única solución de la ecuación $y' + a(x)y + b(x) = 0$ en $[x_1, x_2]$ tal que $y(x_1) = y_1$, y que cualquier solución de la ecuación homogénea $y' + a(x)y = 0$ que se anule en un punto $x \in [x_1, x_2]$ es idénticamente nula.

10. Hallar la ecuación de una curva tal que la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera es la mitad de la pendiente de la recta que une el punto con el origen.

11. Hallar la ecuación de las curvas tales que la normal en un punto cualquiera pasa por el origen.

12. Demostrar que la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa del punto de contacto es una parábola.

13. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz. Probar que si $x(t)$ es una solución de
$$x'(t) = F(x(t))$$
que verifica $x(t_0 + T) = x(t_0)$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ entonces $x(t)$ es una función periódica de período T.

14. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz. Verificar que si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos soluciones de
$$x'(t) = F(x(t))$$
tales que $x_1(t_1) = x_2(t_2)$ para ciertos $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, entonces $Im(x_1) = Im(x_2)$.

15. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz tal que $F(p_1) = F(p_2) = 0$ con $p_1 < p_2$. Probar que si $x_0 \in (p_1, p_2)$, entonces la solución de
$$x'(t) = F(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$
está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Sugerencia: Probar primero que $p_1 < x(t) < p_2$ para todo t en donde x esté definida.

16. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz y sea $x(t)$ una solución de
$$x'(t) = F(x(t))$$
tal que $x(t) \to x_0$ cuando $t \to +\infty$. Probar que $F(x_0) = 0$.

17. (a) Hallar las soluciones de:

$$\text{i. } y' + y = \sin x \qquad \text{ii. } y' + y = 3\cos(2x)$$

(b) Halle las soluciones de $y' + y = \sin x + 3\cos(2x)$ cuya gráfica pase por el origen (Piense, y no haga cuentas de más).

18. Dada la ecuación no homogénea $y' + a(x)y = b(x)$ donde $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas con período $p > 0$ y $b \not\equiv 0$.

(a) Pruebe que una solución Φ de esta ecuación verifica:

$$\Phi(x+p) = \Phi(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ \ \Phi(0) = \Phi(p)$$

(b) Encuentre las soluciones de período 2π para las ecuaciones:

$$y' + 3y = \cos x \qquad y' + \cos(x)y = \mathrm{sen}(2x)$$

19. Suponga que el ritmo al que se enfría un cuerpo caliente es proporcional a la diferencia de temperatura entre él y el ambiente que lo rodea (ley de enfriamiento de Newton). Un cuerpo se calienta 110 °C y se expone al aire libre a una temperatura de 10 °C. Al cabo de una hora su temperatura es de 60 °C. ¿Cuánto tiempo adicional debe transcurrir para que se enfríe a 30 °C?

20. Si la resistencia del aire que actúa sobre un cuerpo de masa m en caída libre ejerce una fuerza retardadora sobre el mismo proporcional a la velocidad ($= -kv$) , la ecuación diferencial del movimiento es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - c\frac{dy}{dt}, \text{ o bien } \frac{dv}{dt} = g - cv$$

donde $c = k/m$. Supongamos $v = 0$ en el instante $t = 0$, y $c > 0$. Encontrar $\lim_{t\to\infty} v(t)$ (llamada velocidad terminal).

Si la fuerza retardadora es proporcional al cuadrado de la velocidad, la ecuación se convierte en:

$$\frac{dv}{dt} = g - cv^2$$

Si $v(0) = 0$, encuentre la velocidad terminal en este caso.

21. La ecuación $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, que se conoce como la ecuación de Bernoulli, es lineal cuando $n = 0, 1$. Demuestre que se puede reducir a una ecuación lineal para cualquier valor de $n \neq 1$ por el cambio de variable $z = y^{1-n}$, y aplique este método para resolver las ecuaciones siguientes:

$$\text{(a) } xy' + y = x^4y^3 \qquad \text{(b) } xy^2y' + y^3 = x\cos x \qquad \text{(c) } xy' - 3y = x^4$$