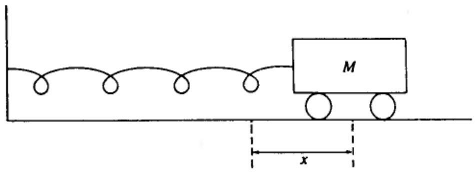

Figura 19

Vibraciones armónicas simples no amortiguadas. Consideremos una carreta de masa M sujeta por un muelle a un muro cercano (Fig. 19). El muelle no ejerce fuerza cuando la carreta se encuentra en su posición de equilibrio $x = 0$, pero si se le desplaza una distancia x, el muelle ejerce una fuerza restauradora $F_s = -kx$, siendo k una constante positiva cuya magnitud mide la rigidez del resorte. Por la segunda ley de Newton, la fuerza total es igual a la masa de la carreta por su aceleración, luego

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_s, \tag{1}$$

o sea,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M}x = 0. \tag{2}$$

Será conveniente escribir esta ecuación de movimiento en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0, \tag{3}$$

donde $a = \sqrt{k/M}$, y su solución general es obviamente

$$x = c_1 \operatorname{sen} at + c_2 \cos at. \tag{4}$$

Si la carreta se lleva a la posición $x = x_0$ y allí se suelta sin velocidad inicial en el instante $t = 0$, de manera que nuestras condiciones iniciales son

$$x = x_0 \quad \text{y} \quad v = \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{cuando } t = 0, \tag{5}$$

entonces se ve fácilmente que $c_1 = 0$ y $c_2 = x_0$, luego (4) se convierte en

$$x = x_0 \cos at. \tag{6}$$

La gráfica de (6) se muestra en la Figura 20. La *amplitud* de esta vibración

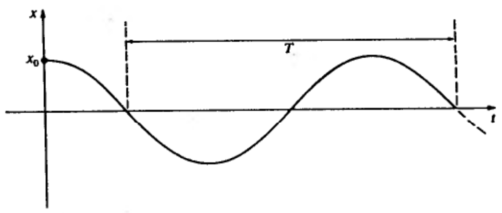

Figura 20

armónica simple es x_0; y dado que su *período* T es el tiempo requerido para completar un ciclo, tenemos $aT = 2\pi$ y

$$T = \frac{2\pi}{a} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}. \tag{7}$$

Su *frecuencia* f es el número de ciclos por unidad de tiempo, así que $fT = 1$ y

$$f = \frac{1}{T} = \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}. \tag{8}$$

De (8) resulta claro que la frecuencia de esta vibración crece al crecer la rigidez del muelle y al decrecer la masa de la carreta, tal y como el sentido común nos dicta.

Vibraciones amortiguadas. El próximo paso en el desarrollo de este problema consiste en añadir el efecto de una *fuerza de amortiguamiento* F_d debida a la viscosidad del medio en el que la carreta se mueve (aire, agua, aceite, etc.). Hacemos la hipótesis específica de que esta fuerza se opone al movimiento y es de magnitud proporcional a la velocidad, o sea, $F_d = -c(dx/dt)$, donde c es una constante positiva que mide la resistencia del medio. La ecuación (1) pasa a ser ahora

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_d, \tag{9}$$

es decir,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{M}x = 0. \tag{10}$$

Por conveniencia, de nuevo, la escribimos como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = 0, \tag{11}$$

donde $b = c/2M$ y $a = \sqrt{k/M}$. La ecuación auxiliar es

$$m^2 + 2bm + a^2 = 0, \tag{12}$$

y sus raíces m_1 y m_2 vienen dadas por

$$m_1, m_2 = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}. \tag{13}$$

La solución general de (11) viene caracterizada, claro está, por la naturaleza de los números m_1 y m_2. Como sabemos, hay tres casos. Los trataremos por separado.

CASO A. $b^2 - a^2 > 0$, o sea, $b > a$. En términos poco precisos esto viene a expresar la hipótesis de que la fuerza de fricción debida a la viscosidad es grande comparada con la rigidez del resorte. Se sigue que m_1 y m_2 son números negativos distintos, y la solución general de (11) es

$$x = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}. \tag{14}$$

Si usamos las condiciones iniciales (5) para calcular c_1 y c_2, (14) se convierte en

$$x = \frac{x_0}{m_1 - m_2}(m_1e^{m_2t} - m_2e^{m_1t}). \tag{15}$$

La gráfica de esta función se muestra en la Figura 21. No hay vibración alguna y la carreta se limita a regresar a su posición de equilibrio. Este tipo de movimiento se llama *sobreamortiguado*. Ahora imaginemos que va decreciendo la viscosidad hasta alcanzar la situación descrita en el próximo caso.

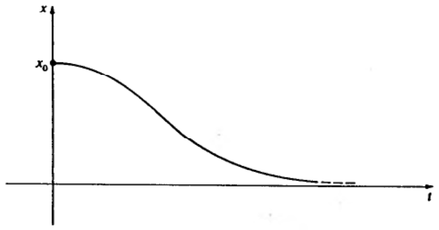

Figura 21

CASO B. $b^2 - a^2 = 0$, o sea, $b = a$. Aquí es $m_1 = m_2 = -b = -a$, y la solución general de (11) es

$$x = c_1e^{-at} + c_2te^{-at}. \tag{16}$$

Al imponer las condiciones iniciales (5) se obtiene

$$x = x_0e^{-at}(1 + at). \tag{17}$$

Esta función tiene un gráfico similar al de (15), y tampoco esta vez hay vibración. Un movimiento de esta clase se llama *críticamente amortiguado*. Si se hace decrecer ahora la viscosidad, siquiera sea un poco, el movimiento pasa a ser ya vibratorio y se llama *subamortiguado*. Esta es realmente la situación interesante, que cae en el marco del siguiente caso.

CASO C. $b^2 - a^2 < 0$, o sea, $b < a$. Ahora m_1 y m_2 son números complejos conjugados $-b \pm i\alpha$, donde

$$\alpha = \sqrt{a^2 - b^2},$$

y la solución general de (11) es

$$x = e^{-bt}(c_1 \cos \alpha t + c_2 \operatorname{sen} \alpha t). \tag{18}$$

Cuando c_1 y c_2 se calculan a la vista de las condiciones iniciales (5), eso se convierte en

$$x = \frac{x_0}{\alpha}e^{-bt}(\alpha \cos \alpha t + b \operatorname{sen} \alpha t). \tag{19}$$

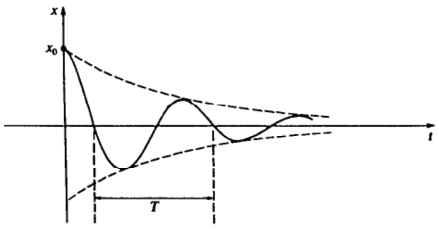

Figura 22

Introduciendo $\theta = \mathrm{tg}^{-1}(b/\alpha)$ se puede expresar (19) de forma más reveladora:

$$x = \frac{x_0\sqrt{\alpha^2 + b^2}}{\alpha} e^{-bt} \cos(\alpha t - \theta). \tag{20}$$

Esta función oscila con una amplitud que decrece exponencialmente, tal como indica la Figura 22. No es periódica en sentido estricto, pero su gráfica cruza la posición de equilibrio $x = 0$ a intervalos regulares. Si consideramos como «período» el tiempo requerido para cerrar un «ciclo» completo, entonces $\alpha T = 2\pi$ y

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/M - c^2/4M^2}}. \tag{21}$$

Además, su «frecuencia» f viene dada por

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}. \tag{22}$$

Este número se suele llamar la *frecuencia natural* del sistema. Cuando la viscosidad desaparece, de modo que $c = 0$, es evidente que (21) y (22) se reducen a (7) y (8). Más aún, comparando (8) con (22) vemos que la frecuencia de la vibración decrece a causa del amortiguamiento, como cabía esperar.

Vibraciones forzadas. Las vibraciones discutidas antes se llaman vibraciones *libres* porque todas las fuerzas que actúan sobre el sistema son internas al propio sistema. Ahora extenderemos nuestro análisis al caso en que una fuerza externa $F_e = f(t)$ actúa sobre la carreta. Una tal fuerza puede aparecer de varias maneras: por ejemplo, procedente de vibraciones del muro al que se halla sujeta

la carreta, o por el efecto sobre ésta de un campo magnético externo (si la carreta es de hierro). En lugar de (9) tenemos, por tanto,

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_d + F_e, \tag{23}$$

luego

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = f(t). \tag{24}$$

El caso más importante se da cuando la fuerza externa es periódica de la forma $f(t) = F_0 \cos \omega t$, de modo que (24) se convierte en

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t. \tag{25}$$

Ya hemos resuelto la correspondiente ecuación homogénea (10), así que lo único que falta por hacer para llegar a la solución general de (25) es construir una solución particular. Y esto se consigue sin dificultad mediante el método de los coeficientes indeterminados. En efecto, tomamos $x = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$ como posible solución para ensayar, y una vez sustituida en (25) obtenemos el siguiente par de ecuaciones para A y B:

$$\omega c A + (k - \omega^2 M)B = F_0,$$
$$(k - \omega^2 M)A - \omega c B = 0.$$

La solución de este sistema es

$$A = \frac{\omega c F_0}{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2} \quad \text{y} \quad B = \frac{(k - \omega^2 M)F_0}{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}.$$

La deseada solución particular es, en consecuencia,

$$x = \frac{F_0}{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}[\omega c \operatorname{sen} \omega t + (k - \omega^2 M)\cos \omega t]. \tag{26}$$

Introduciendo $\phi = \mathrm{tg}^{-1}[\omega c/(k - \omega^2 M)]$ podemos escribir (26) en la forma más habitual

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}} \cos(\omega t - \phi). \tag{27}$$

Si ahora suponemos que estamos en el caso de movimiento subamortiguado citado antes, la solución general de (25) es

$$x = e^{-bt}(c_1 \cos \alpha t + c_2 \operatorname{sen} \alpha t) + \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}} \cos(\omega t - \phi). \qquad (28)$$

El primer término es claramente *transitorio* en el sentido de que tiende a cero cuando $t \to \infty$. De hecho, eso es cierto sea o no subamortiguado el movimiento, en la medida en que haya algún nivel de amortiguamiento presente (Problema 17-2). Por tanto, con el paso del tiempo el movimiento va adquiriendo la forma del segundo término, la parte *estacionaria*. Habida cuenta de ello, podemos despreciar la parte transitoria de (28) y afirmar que para grandes t la solución general de (25) es esencialmente igual a la solución particular (27). La frecuencia de esta vibración forzada coincide con la frecuencia impresa $\omega/2\pi$, y su amplitud es el coeficiente

$$\frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}}. \qquad (29)$$

Esta expresión para la amplitud encubre varios secretos interesantes, porque depende no sólo de ω y F_0, sino también de k, c y M. Por ejemplo, nótese que si c es muy pequeño y ω próximo a $\sqrt{k/M}$ (de modo que $k - \omega^2 M$ es muy pequeño), lo que significa que el movimiento es ligeramente amortiguado y la frecuencia impresa $\omega/2\pi$ es cercana a la frecuencia natural

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M} - \frac{c^2}{4M^2}},$$

entonces la amplitud es muy grande. Este fenómeno se conoce como *resonancia*. Un ejemplo clásico es la vibración forzada de un puente bajo el impacto de los pies de columnas de soldados cuyo ritmo de paso corresponda muy aproximadamente a la frecuencia natural del puente.

Finalmente, mencionemos brevemente ciertas relaciones entre el problema mecánico discutido antes y el eléctrico visto en la Sección 13. Se probó en esa sección que si una fuerza electromotriz periódica $E = E_0 \cos \omega t$ actúa en un circuito simple que contiene una resistencia, una inductancia y un condensador, la carga Q de este último viene dada por la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E_0 \cos \omega t. \qquad (30)$$

Esta ecuación es sorprendentemente similar a (25). En particular, la siguiente correspondencia salta a la vista:

masa $M \leftrightarrow$ inductancia L;

viscosidad $c \leftrightarrow$ resistencia R;

constante del muelle $k \leftrightarrow$ inversa de la capacitancia $\frac{1}{C}$;

desplazamiento $x \leftrightarrow$ carga Q del condensador.

La analogía entre los sistemas mecánicos y eléctricos convierte en idénticas las matemáticas de ambos sistemas y permite trasladar las conclusiones del primero al segundo sin dificultad. En el circuito eléctrico citado tenemos, por tanto, una resistencia crítica por debajo de la cual el comportamiento libre del circuito será vibratorio con cierta frecuencia natural, una vibración forzada estacionaria de la carga Q y fenómenos de resonancia que aparecen en circunstancias favorables para ello.

PROBLEMAS

1. Considerando la vibración forzada (27) en el caso subamortiguado, hallar la frecuencia impresa para la que la amplitud (29) alcanza un máximo. ¿Existe necesariamente dicha frecuencia? Este valor de la frecuencia impresa (cuando exista) se llama *frecuencia de resonancia*. Probar que siempre es menor que la frecuencia natural.

2. Consideremos la vibración libre subamortiguada descrita por la fórmula (20). Demostrar que x toma valores máximos para $t = 0, T, 2T, \ldots$, siendo T el «período» dado por (21). Si x_1 y x_2 son dos máximos sucesivos de x, probar que $x_1/x_2 = e^{bT}$. El logaritmo de esta cantidad, bT, se llama *decremento logarítmico* de la vibración.

3. Una boya esférica de radio r flota parcialmente sumergida en agua. Si se le quita presión, una fuerza igual al peso del agua desalojada le empuja hacia arriba; y si se suelta entonces, oscilará arriba y abajo. Hallar el período de su oscilación si el rozamiento del agua es despreciable.

4. Una boya cilíndrica de 2 pies de diámetro flota con su eje vertical en agua de densidad 62,4 libras/pie cúbico. Al quitarle algo de presión y soltarla, su período de oscilación es de 1,9 segundos. ¿Cuánto pesa la boya?

5. Supongamos que se perfora un túnel recto entre dos puntos cualesquiera de la superficie terrestre. Si se coloca una pista sin rozamiento entre ellos, un vagón situado en un extremo del túnel comenzará a deslizar por su propio peso, se detendrá al llegar al otro extremo y regresará. Probar que el tiempo invertido es el mismo para todo túnel de ese tipo, y estimar su valor. Si el túnel mide $2L$ millas de longitud, ¿cuál es la velocidad máxima que alcanza el vagón?

6. La carreta de la Figura 19 pesa 128 libras y está sujeta al muro con un resorte de constante $k = 64$ libras/pie. Se aparta la carreta 6 pulgadas del muro y se suelta sin velocidad inicial. Simultáneamente, se le aplica una fuerza periódica externa $F_e = f(t) = 32 \operatorname{sen} 4t$. Suponiendo que no hay resistencia del aire, hallar la posición $x = x(t)$ de la carreta en el instante t. Nótese que $|x(t)|$ toma valores arbitrariamente grandes para $t \to \infty$, un fenómeno conocido como *resonancia pura* y provocado por