Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1er cuatrimestre del 2007

PRCTICA 3 - CAMBIO DE VARIABLES Y APLICACIONES

1. Sean $D_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 4\pi\}$ y $T(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

(a) Hallar $D = T(D_1)$.

(b) Calcular $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$ y $\int_{D_1} r^2 J dr d\theta$ siendo J el jacobiano de la transformación. ¿Dan igual los dos integrales? ¿Por qué?

2. Sea $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (4u, 2u + 3v)$. Sea D^* el rectángulo $[0, 1] \times [1, 2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular:

(a) $\int_D xy dx dy$ (b) $\int_D (x - y) dx dy$

haciendo un cambio de variables para transformarlas en integrales sobre D^* .

3. Repetir el ejercicio 2 para $T(u, v) = (u, v(1 + u))$.

4. Sean $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ y $D^* = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular su área.

5. Sean $T(u, v)$ y D los del ejercicio anterior. Calcular:

$$\int_D \frac{dx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

haciendo ese cambio de variables.

6. Calcular $\int_D (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$ donde D es el disco de centro en el origen y radio 2.

7. Hallar el área dentro de la curva $r = 1 + \sin \theta$.

8. Dado el paralelogramo P del plano xy con vértices $(0,0)$, $(2,10)$, $(3,17)$ y $(1,7)$,

(a) Hallar una transformación lineal que convierta a P en un rectángulo R del plano uv con vértices opuestos en $(0,0)$ y $(4,2)$.

(b) Calcular la integral $\int_P xy dx dy$ transformándola en una integral sobre el rectángulo R .

9. Es sabido, aunque difícil de demostrar, que una primitiva de la función e^{-x^2} no puede expresarse en términos de las funciones elementales usuales. Esto dificulta el cálculo de $\int_a^b e^{-x^2} dx$. Sin embargo, el siguiente truco notable permite calcular de manera simple la integral impropia $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$:

(a) Observar que $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

- (b) Calcular la integral de (a) como límite de integrales en círculos utilizando coordenadas polares.

10. Integrar $ze^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 4$.

11. Hallar el área acotada por la curva dada por la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Esta curva se llama lemniscata. ¿Por qué?

12. Calcular el volumen de un cilindro con base circular de radio r y altura h .

13. (a) Calcular el volumen $V(R)$ de una esfera B_R de radio R .

- (b) Llamando ∂B_R a la superficie del borde de la esfera B_R y $A(\partial B_R)$ a su área, demostrar que $\frac{dV(R)}{dR} = A(\partial B_R)$ y deducir el valor del área de dicha superficie.

14. Integrar $x^2 + y^2 + z^2$ sobre el cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$.

15. Sea B la bola unitaria, es decir, $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Calcular:

$$\int_B \frac{dx dy dz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

16. Calcular $\int_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy$, donde A está determinado por las condiciones $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x + y \geq 1$.

17. Calcular:

$$\int_S \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde S es el sólido acotado por dos esferas de radios a y b con $0 < b < a$ y centradas en el origen.

18. Calcular $\int_B z dx dy dz$ donde B es la región sobre el plano xy dentro del cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ y debajo del cono dado por $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

19. Sea E el elipsoide dado por $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1$.

- (a) Hallar el volumen de E .
- (b) Calcular $\int_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)] dx dy dz$.
20. Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ si la densidad es $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.
21. Hallar el centro de masa del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$, si la densidad es $\rho = (x^2 + y^2)z^2$.
22. Si un sólido W tiene densidad uniforme ρ , el *momento de inercia* alrededor del eje x esta definido por,

$$I_x = \int_W \rho(y^2 + z^2) dx dy dz$$

y análogamente se definen I_y e I_z . Sea ahora W el sólido con densidad constante acotado por arriba por el plano $z = a$ y por debajo por el cono descrito en coordenadas esféricas por $\phi = k$, donde k es una constante tal que $0 < k < \pi/2$. Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje z .

23. Hallar el momento de inercia alrededor del eje y para la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ si la densidad de masa es una constante ρ .
24. Dado un sólido W con densidad de masa $\rho(x, y, z)$, la fuerza gravitacional $\mathbf{F}$ que ejerce W sobre una masa m en (x_1, y_1, z_1) está dada por el gradiente de una función V llamada *potencial gravitacional*, es decir, $\mathbf{F} = -\nabla V$. Este *potencial gravitacional* está dado por,

$$V(x_1, y_1, z_1) = Gm \int_W \frac{\rho(x, y, z) dx dy dz}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}$$

donde G es la constante de gravitación universal.

- (a) Hallar el potencial gravitacional sobre una masa m de un planeta esférico con una masa $M = 3 \cdot 10^{26}$ kg, a una distancia de $2 \cdot 10^8$ m de su centro.
- (b) Hallar la fuerza gravitacional ejercida sobre un objeto de 70kg en la posición indicada en (a).