Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1er cuatrimestre del 2007

Práctica 6 - Teoremas integrales del análisis vectorial

1. Verificar el teorema de Green para el disco D con centro $(0,0)$ y radio R y las siguientes funciones:

   (a) $P(x,y) = xy^2,\ Q(x,y) = -yx^2$,

   (b) $P(x,y) = 2y,\ Q(x,y) = x$.

2. Verificar el teorema de Green y calcular $\int_C y^2\,dx + x\,dy$, siendo C la curva recorrida en sentido positivo:

   (a) cuadrado con vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$,

   (b) elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

   (c) $C = C_1 \cup C_2$, donde $C_1 : y = x$, $x \in [0,1]$, y $C_2 : y = x^2$, $x \in [0,1]$.

3. Usando el teorema de Green, hallar el área de:

   (a) el disco D con centro $(0,0)$ y radio R,

   (b) la región dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4. Sea D la región encerrada por el eje x y el arco de la cicloide:

$$x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

   Usando el teorema de Green, calcular el área de D.

5. Probar la fórmula de integración por partes: Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio elemental, ∂D su frontera orientada en sentido antihorario y $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normal exterior a D, entonces

$$\int_D u\,v_x\,dx\,dy = -\int_D u_x\,v\,dx\,dy + \int_{\partial D} u\,v\,n_1\,ds,$$

   para todo par de funciones u, $v \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$.

6. Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$, y el campo vectorial radial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$.

7. Sea S la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies S_1 y S_2; donde S_1 es el conjunto de (x,y,z) con $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ y S_2 es el conjunto de (x,y,z) con $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, $z \geq 1$. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.

8. (a) Considerar dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S. Describir, mediante dibujos, como deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

   (b) Deducir que si S es una superficie cerrada, entonces

$$\int_{S} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

   (una superficie cerrada es aquella que constituye la frontera de una región en el espacio; así, por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada).

   (c) Calcular $\displaystyle\int_{S} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, y $\mathbf{F} = (\operatorname{sen} xy, e^x, -yz)$.

9. Verificar el teorema de Stokes para la helicoide $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta)$, $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, \pi/2]$ y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y)$

10. Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo $\mathbf{F} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ y la superficie S, siendo

   (a) $S =$ círculo de radio $a > 0$ en el plano $z = 0$.

   (b) $S =$ región del plano $z = 0$ que es intersección de $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x + y \geq 1$.

11. (a) Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitacional

$$\mathbf{F} = -GmM \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

   cuando el punto de aplicación de $\mathbf{F}$ se desplaza de $(1, 1, 1)$ a $(2, 2, 2)$ a lo largo de

   i. el segmento que une los dos puntos,

   ii. una poligonal formada por aristas paralelas a los ejes el cubo del cual $(1, 1, 1)$ y $(2, 2, 2)$ son vértices opuestos diagonalmente.

   (b) Comprobar que la integral curvilínea sólo depende de los puntos inicial y final. Calcular $\nabla \times \mathbf{F}$ y hallar una función potencial $f : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}$ para $\mathbf{F}$.

12. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F}$ en el plano es el gradiente de una función escalar f. Si existe dicha f, hallarla.

    (a) $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$
    (b) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$
    (c) $\mathbf{F}(x, y) = (\cos xy - xy \sin xy, x^2 \sin xy)$

13. Evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde

    (a) $\mathbf{F} = (2xyz + \operatorname{sen} x, x^2 z, x^2 y)$, y C es la curva que está parametrizada por $(\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$, $0 \leq t \leq \pi$.
    (b) $\mathbf{F} = (\cos xy^2 - xy^2 \sin xy^2, -2x^2 y \sin xy^2, 0)$, y C es la curva $(e^t, e^{t+1}, 0)$, $-1 \leq t \leq 0$.

14. (a) Rehacer el ejercicio 14 de la práctica 5, usando el teorema de Gauss.
    (b) Idem (a), pero con el ejercicio 12 de la misma práctica.

15. Verificar el teorema de la divergencia para $\mathbf{F} = (x, y, z)$ y Ω el sólido intersección de $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

16. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, siendo $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ y S la superficie interior de la esfera de radio R. (Sugerencia: usar el teorema de Gauss)

17. Rehacer el ejercicio 8 (b) de esta práctica usando el teorema de Gauss.

18. Usando el teorema de Gauss, probar las *identidades de Green*:

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\int_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f)\, dx\, dy\, dz.$$

    Aquí $\mathbf{n}$ es la normal exterior al dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, y f, g son de clase C^2.

19. Para cada $R > 0$ sea la superficie $S_R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ orientada con la normal cuya tercer coordenada es positiva y sea el campo

$$F(x, y, z) = (zx - x\cos(z), -zy + y\cos(z), 4 - x^2 - y^2).$$

    Determinar R de modo que el flujo del campo F a través de S_R sea máximo.

20. Calcular

$$\int_C (y + \operatorname{sen}(x))\, dx + \left(\frac{3}{2} z^2 + \cos(y)\right) dy + 2x^3\, dz,$$

    en donde C es la curva $\alpha(t) = (\operatorname{sen}(t), \cos(t), \operatorname{sen}(2t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (Sugerencia: Observar que C se encuentra en la superficie $z = 2xy$).

21. Sean $S_1 = \{(x,y,1) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $S_2 = \{(x,1,z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, $S_3 = \{(1,y,z) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ y sea $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ orientada con la normal unitaria que en $(0,0,1)$ coincide con $(0,0,1)$.

    Si $F(x,y,z) = (x(1+\operatorname{sen}(z^2)), y(1-\operatorname{sen}(z^2)), z)$ calcular $\int_S F \cdot dS$.

22. Sea $a \in \mathbb{R}$. Probar que el flujo del campo

$$F(x,y,z) = (1 - x^2 - y^2, 1 - x^2 - y^2, 2z(x+y) + x^2 + y^2)$$

    a través de la superficie S_a que es la porción del plano $ay + 2z = 2a$ delimitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, no depende de a (S_a está orientada hacia arriba). Calcular dicho flujo.

23. Sea $F(x,y,z) = (x + y + z, 2xyz, e^{zxy^2} cos(x^2 + y))$. Hallar el flujo del rotor de F a través de la superficie del cono $x^2 + y^2 = (z+1)^2$ comprendida entre z=0 y z=1, orientada con normal exterior.