Análisis II - Matemática 3

Toque, gol y fiesta

PRÁCTICA 0 - TODO LO QUE UD. QUERÍA SABER SOBRE INTEGRALES MÚLTIPLES Y NUNCA SE ATREVIÓ A PREGUNTAR.

1. Evaluar cada una de las integrales siguientes si $R = [0, 1] \times [0, 1]$:

(a) $\int_R (x^3 + y^2) dx dy$

(b) $\int_R ye^{xy} dx dy$

(c) $\int_R (xy)^2 \cos x^3 dx dy$

(d) $\int_R \ln[(x+1)(y+1)] dx dy$

(e) $\int_R (x^m y^n) dx dy$, donde $m, n > 0$

2. Sean f continua en $[a, b]$ y g continua en $[c, d]$. Mostrar que

$$\int_R [f(x)g(y)] dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy$$

donde $R = [a, b] \times [c, d]$.

3. Calcular el volumen del solido acotado por la gráfica $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2]$ y los "lados verticales" de R .
4. Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y, & \text{si } x \text{ no es racional} \end{cases}$$

Mostrar que la integral iterada $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$ existe pero f no es integrable. ¿Existe la otra integral iterada?

5. Sean $F \in \mathcal{C}^2$ y $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$. Calcular $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$ en términos de F .

6. Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones D determinadas por los límites de integración:

$$(a) \int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx \qquad (b) \int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy dx$$

$$(c) \int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y) dy dx \qquad (d) \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y dy dx$$

$$(e) \int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2+y) dx dy \qquad (f) \int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx$$

7. Sea D la región acotada por los semiejes positivos de x e y y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular

$$\int_D (x^2 + y^2) dx dy$$

8. Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$. Calcular

$$\int_D x^3 y dx dy$$

9. Calcular el volumen de las siguientes regiones:

(a) R : encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.

(b) R : encerrada por el cono de altura 4 dado por $z^2 = x^2 + y^2$.

(c) R : encerrada por las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

10. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, dibujar las regiones correspondientes y evaluar la integral por los dos caminos.

$$(a) \int_0^1 \int_x^1 xy dy dx \qquad (b) \int_0^1 \int_{2-y}^1 (x+y)^2 dx dy$$

$$(c) \int_0^1 \int_{2x}^{3x} x^2 y dy dx \qquad (d) \int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2 dx dy$$

11. Calcular $\int_T e^{x-y} dx dy$ donde T es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 3)$, y $(2, 2)$.

12. Calcular:

$$(a) \int_C (xyz + x^2 y^2 z^2) dV, \text{ donde } C = [0, 1] \times [-3, 2] \times [-1, 1].$$

- (b) $\int_C (x \cos z + y \cos x + z \cos y) dV$, donde $C = [0, \pi]^3$
13. Calcular $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x+y}^{x^2+y^2} dz dy dx$ y dibujar la region de integración.
14. Cambiar el orden de integración en

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx$$

para obtener otras cinco formas de realizar la misma integración. Dibujar la region de integración.

Aplicaciones de la integral múltiple

15. Hallar el promedio de $f(x, y) = y \operatorname{sen} xy$ sobre $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$.
16. Una placa de oro grabada ocupa el rectángulo definido por $0 \leq x \leq 2\pi$ y $0 \leq y \leq \pi$ (donde x e y se miden en cm) y tiene una densidad de masa $\rho(x, y) = y^2(\operatorname{sen} 4x + 2)^2$ gramos por centímetro cuadrado. Si el oro cuesta \$7 por gramo, ¿cuánto vale el oro de toda la placa?
17. (a) Hallar la masa de la caja $[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1] \times [0, 2]$ suponiendo que la densidad es constante ($= \rho$).
- (b) Lo mismo que en la parte (a) pero suponiendo ahora que la densidad está dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z + 1$.
18. El campo gravitatorio en un punto (x, y, z) del espacio (es decir, la fuerza gravitatoria que aparecerá por unidad de masa puntual colocada en ese punto) debido a un objeto que ocupa una region Ω con una densidad de masa $\rho(x, y, z)$ está dada por:

$$G(x, y, z) = \int_{\Omega} \frac{(u - x, v - y, w - z)}{((u - x)^2 + (v - y)^2 + (w - z)^2)^{\frac{3}{2}}} \rho(u, v, w) du dv dw$$

Demostrar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\|G(x, y, z)\|}{\frac{m}{r^2}} = 1$$

siendo m la masa total del objeto y $r = \|(x, y, z)\|$. Analizar el significado.