

## Análisis II–Análisis matemático II–Matemática 3.

1er. cuatrimestre de 2008

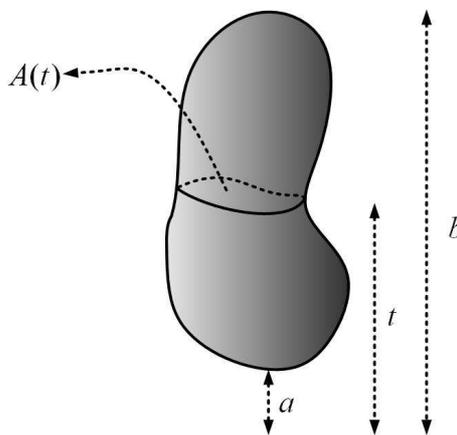
Práctica 0 - Repaso de integración y cambio de variables.

### 1 Principio de Cavalieri.

**Ejercicio 1** Considerar un cuerpo que ocupa una región  $\Omega$  en el espacio comprendida entre los planos  $z = a$  y  $z = \ell$ . Deduzca que el volumen del cuerpo se puede calcular como

$$V = \int_a^\ell A(t) dt,$$

donde  $A(t)$  es el área de la sección del cuerpo obtenido al intersecarlo con el plano  $z = t$ .



**Ejercicio 2** Calcular el volumen de una región cilíndrica. Verificar que la fórmula resultante coincide con la fórmula empírica *superficie de la base por altura*.

**Ejercicio 3** Calcular el volumen de la región encerrada por el paraboloides de ecuación  $z = x^2 + y^2$  y el plano  $z = 2$ .

### 2 Fubini.

**Ejercicio 4** Sea  $R$  el rectángulo  $R = [-1; 1] \times [0; 1]$ . Evaluar las siguientes integrales dobles:

(a)  $\iint_R x^2 y dA,$

(b)  $\iint_R x \cos(xy) dA.$

**Ejercicio 5** Sea  $R$  el rectángulo arbitrario  $[a; b] \times [c; d]$ . Expresar mediante integrales simples la integral doble  $\iint_R F(x, y) dA$  cuando  $F(x, y)$  está dada por

(a)  $F(x, y) = f(x)g(y)$

(b)  $F(x, y) = f(x) + g(y).$

### 3 Descripción de Regiones.

**Ejercicio 6** Sea  $T$  el triángulo de vértices  $(0; 0)$ ,  $(2; 3)$  y  $(3; 5)$ . Describirlo como una región de tipo 1. Describirlo como una región de tipo 2. Hallar el área.

**Ejercicio 7** Para cada una de las siguientes descripciones, graficar la región correspondiente y calcular el área respectiva.

$$(a) -1 \leq x \leq 1 + y; -1 \leq y \leq 1,$$

$$(b) 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}; 0 \leq x \leq 1,$$

**Ejercicio 8** Sea  $\mathcal{P}$  la pirámide cuyos vértices son  $(0; 0; 0)$ ,  $(1; 0; 0)$ ,  $(0; 1; 0)$  y  $(0; 0; 1)$ . Describirla analíticamente. Hallar el volumen.

### 4 Aplicaciones de la integral.

**Ejercicio 9** *Valor medio*: Hallar el valor medio de la función  $f(x, y) = x^2y$  en la región triangular de vértices  $(1; 1)$ ;  $(2; 0)$  y  $(0; 1)$ .

**Ejercicio 10** *Masa*: Hallar la masa de la región esférica  $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$  sabiendo que la densidad de masa es proporcional a la componente  $z$ , digamos  $\rho = \lambda z$ .

**Ejercicio 11** *Campo gravitatorio* : Consideremos un cuerpo material con densidad  $\rho(x, y, z)$ . que ocupa la región  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ . A partir de las leyes de Newton, se sabe que el **vector** campo gravitatorio que aparece en el punto de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  está dado por la siguiente integral, escrita en forma vectorial con  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , las coordenadas del punto donde queremos medir el campo,  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ , las coordenadas de un punto genérico del cuerpo y  $G$  una constante universal:

$$E(\mathbf{r}) = -G \iint_{\Omega} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}').$$

Supongamos que el cuerpo ocupa una región acotada en el espacio, digamos  $\Omega \subset B_R(0)$  y observemos que  $\|E(\mathbf{r})\| \sim \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2}$  cuando  $\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty$ .

A medida que  $\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty$ , la dirección del vector  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  con  $\mathbf{r}' \in \Omega$  se parece más y más a la dirección de  $\mathbf{r}$ .

Esto hace suponer para puntos *lejanos*, el campo puede aproximarse por el campo gravitatorio que se obtiene al concentrar la masa total  $M$  en el origen:  $E_0(\mathbf{r}) = -MG \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$ .

Probar que esto es realmente así. Es decir, probar que

$$\lim_{\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty} \|\mathbf{r}\|^2 \|E(\mathbf{r}) - E_0(\mathbf{r})\| = 0.$$

Nota: Hemos usado la notación  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  para el producto escalar de los vectores. La idea del último ejercicio es aprovechar para hablar de integrar vectores y de la desigualdad  $\| \int \mathbf{f} \| \leq \int \| \mathbf{f} \|$

## 5 Cambio de Variables.

**Ejercicio 12** Sean  $T(u, v) = T(x(u, v), y(u, v)) = (a_{11}u + a_{12}v, a_{21}u + a_{22}v)$  con  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ . Sea  $D^*$  el rectángulo  $[0, 3] \times [1, 3]$ .

- (a) Hallar  $D = T(D^*)$ . ¿Es biyectiva  $T$ ? Observar que  $D$  es un paralelogramo y hallar su área.
- (b) Describir el área de  $D$  en terminos de una integral sobre  $D^*$ . Indicar qué función hay que integrar y qué relación tiene con  $T$ .

**Ejercicio 13** Sea  $D$  el paralelogramo de vértices  $(1, 2)$ ,  $(5, 3)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(6, 7)$ . Calcular

- (a)  $\int_D xy \, dx dy$
- (b)  $\int_D (x - y) \, dx dy$

Sugerencia: Plantear las integrales como integrales sobre el cuadrado  $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ .

**Ejercicio 14** Sean  $D^* = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ,  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  y  $P$  la transformación de coordenadas polares a cartesianas, es decir,  $P(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

- (a) Mostrar que  $P(D^*) = D$ . ¿Es biyectiva  $P$ ?
- (b) ¿En qué transforma  $P$  el rectángulo  $[r, r + \Delta r] \times [\theta, \theta + \Delta \theta]$ ?
- (c) Calcular la matriz  $DP(r, \theta)$ . ¿En qué transforma la aplicación dada por esta matriz al rectángulo dado en b)? ¿Y en el caso  $r = 0$ ?
- (d) Escribir la demostración de la fórmula de cambio de variables en este caso (haciendo los dibujos correspondientes).

**Ejercicio 15** Sean  $D_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 4\pi\}$  y  $P$  la transformación del ejercicio anterior.

- (a) Hallar  $D = P(D_1)$ .
- (b) Calcular  $\int_D (x^2 + y^2) \, dx dy$  y  $\int_{D_1} r^2 J \, dr d\theta$  siendo  $J$  el jacobiano de la transformación polar.

¿Dan igual las dos integrales? ¿Por qué?

**Ejercicio 16** Hallar el área acotada por la curva dada por la ecuación  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ . Esta curva se llama lemniscata.

**Ejercicio 17** Calcular  $\int_B z \, dx \, dy \, dz$  donde  $B$  es la región sobre el plano  $xy$  dentro del cilindro dado por  $x^2 + y^2 \leq 1$  y debajo del cono dado por  $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ .

**Ejercicio 18** Sea  $E$  el elipsoide dado por  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1$ .

- (a) Hallar el volumen de  $E$ .
- (b) Calcular  $\int_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)] \, dx dy dz$ .

**Ejercicio 19** Hallar el centro de masa del cilindro  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $1 \leq z \leq 2$ , si la densidad es  $\rho = (x^2 + y^2)z^2$ .

**Ejercicio 20** Si un sólido  $W$  tiene densidad uniforme  $\rho$ , el momento de inercia alrededor del eje  $x$  está definido por,

$$I_x = \int_W \rho (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

y análogamente se definen  $I_y$  e  $I_z$ . Sea ahora  $W$  el sólido con densidad constante acotado por arriba por el plano  $z = a$  y por debajo por el cono descrito en coordenadas esféricas por  $\phi = k$ , donde  $k$  es una constante tal que  $0 < k < \pi/2$ . Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje  $z$ .