Análisis II–Análisis matemático II–Matemática 3

Práctica 1

1 Fubini

NOTA: a lo largo de esta práctica (y de las siguientes) nos referiremos al elemento de *volumen* mediante alguna de las siguientes expresiones: en el plano dA o $d^2(x,y)$; en el espacio dV o $d^3(x,y,z)$. En otras palabras, evitaremos la expresión $dxdydz$ para referirnos al elemento de volumen (**puesto que se trata de un abuso de lenguaje**); siempre que aparezcan expresiones con diferenciales multiplicando deberán interpretarse como pertenecientas a una integral iterada **en el orden sugerido por la multiplicación**

Ejercicio 1 Sea R el rectángulo $R = [-1;1] \times [0;1]$. Evaluar las siguientes integrales dobles:

$$(a) \iint_R x^2 y dA \qquad (b) \iint_R x^3 y^2 dA$$

$$(c) \iint_R x^2 + y^2 dA \quad (d) \iint_R x \cos(xy) dA$$

Ejercicio 2 Sea R el rectángulo arbitrario $[a;b] \times [c;d]$. Expresar mediante integrales simples la integral doble $\iint_R F(x,y)dA$ cuando $F(x,y)$ está dada por

$$(a) F(x,y) = f(x)g(y) \quad (b) F(x,y) = f(x) + g(y)$$

2 Descripción de regiones planas

Ejercicio 3 Sea Ω la región encerrada superiormente por la recta $y = x$ e inferiormente por la circunferencia de radio 1 centrada en $(1,1)$. Dar una descripción algebraica: ¿de qué tipo de región se trata? Hallar el área.

Ejercicio 4 Sea $\mathcal{P}$ el paralelogramo de vértices $(1;1), (2;2), (3;1)$ y $(4;2)$. Describirlo como una región de tipo 1. Describirlo como una región de tipo 2. Hallar el área.

Ejercicio 5 Sea T el triángulo de vértices $(1;0); (2;0)$ y $(0;1)$. Describirlo como una región de tipo 1. Describirlo como una región de tipo 2 y comparar las dificultades. Sugerencia: ésta **es** una región de tipo 1. Hallar el área.

Ejercicio 6 Sea $\mathcal{P}$ el paralelogramo de vértices $(1;1), (2;3), (3;2)$ y $(4;4)$. Describirlo como una región de tipo 1. Describirlo como una región de tipo 2. Hallar el área.

Ejercicio 7 Sea T el triángulo de vértices $(0;0); (2;3)$ y $(3;5)$. Describirlo como una región de tipo 1. Describirlo como una región de tipo 2. Hallar el área.

Ejercicio 8 Para cada una de las siguientes descripciones, graficar la región correspondiente y calcular el área respectiva.

- $-1 \leq x \leq 1 + y;\ -1 \leq y \leq 1.$
- $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2};\ 0 \leq x \leq 1.$
- $\frac{x}{2} + 1 \leq y \leq x;\ 0 \leq x \leq 1.$

3 Descripción de regiones en el espacio

Ejercicio 9 Sea $\mathcal{S}$ la región encerrada por el cilindro vertical de radio 1 centrado en el origen y los palnos paralelos $z = 0$ y $z = 3$. dar una descripción algebraica. ¿De qué tipo de región se trata? Hallar el volumen.

Ejercicio 10 Sea $\mathcal{P}$ la pirámide cuyos vértices son $(0;0;0)$, $(1;0;0)$, $(0;1;0)$ y $(0;0;1)$. Describirla como una región de tipo 1. Hallar el volumen.

Ejercicio 11 Sea $\mathcal{B}$ la región que es interior al cilindro vertical de radio 1 y centro en $(1;0;0)$, y está limitada superior e inferiormente por la esfera de radio 1 centrada en el origen. (Esta región se conoce como *Bóveda de Viviani*.) Dar una descripción como región de tipo 1.

Ejercicio 12 Elegir un sistema cartesiano adecuado y describir algebraicamente la región interior a dos cilindros de igual radio cuyos ejes se cortan perpendicularmente.

4 Principio de Cavalieri

En los ejercicios siguientes utilizaremos el Principio de Cavalieri para calcular el volumen de algunos objetos con geometrías sencillas –básicamente, con simetría de revolución. En todos los casos forma parte del problema tanto señalar cuáles son los datos necesarios (v.g., el radio de la esfera) como hacer el planteo completo de la integral (elección del eje, límites de integración y demás). Asimismo, forma parte del problema detectar las simetrías de los objetos como para facilitar los cálculos; así, la elección adecuada del plano de corte ofrecerá secciones sencillas; esto es, figuras conocidas cuya área es fácilmente calculable. Debe quedar claro que la idea es plantear el cálculo del volumen como una integral **simple**: planteos con integrales múltiples no respetarían la consigna que es comprender la noción de medir. Insistimos, el propósito de los ejercicios no es obtener la fórmula del volumen de un tal objeto sino en descubrir cómo esta idea de *cortar y pegar* nos acercan a la noción de medir.

Ejercicio 13 Calcular el volumen de una región cilindríca. Verificar que la fórmula resultante coincide con la fórmula empírica *superficie de la base por altura.*

Ejercicio 14 Calcular el volumen de la región encerrada por una esfera.

Ejercicio 15 Calcular el volumen de una región cónica. Aprovechar los resultados para calcular el volumen de un *cono truncado*; es decir, de un balde. Verificar, además, que el volumen del *cono* es la tercera parte del volumen del *cilindro* que tiene la misma base y la misma altura.

Ejercicio 16 Calcular el volumen de la región encerrada por el paraboliode de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$.

Ejercicio 17 ¿Qué sistema de coordenadas conviene utilizar para describir las regiones de los ejercicios anteriores?

5 Aplicaciones de la integral

Ejercicio 18 *Valor medio:* Hallar el valor medio de la función $f(x,y) = x^2y$ en la región triangular del Ejercicio 5.

Ejercicio 19 *Masa:* Hallar la masa de la región esférica $x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2$ sabiendo que la densidad de masa es proporcional a la componente z, digamos $\varrho = \lambda z$.

Ejercicio 20 *Centro de masa:* Hallar el **vector** centro de masa de la región esférica del Ejercicio 19. Indicar cuáles son las simetrías de la **configuración** y utilizarlas para anular componentes.

Ejercicio 21 *Las esferas, las bolas y sus medidas:* Dado que la bola puede descomponerse en una colección de esferas concéntricas, si pensamos que el espesor es infinitesimal, digamos dr, entonces podremos expresar el volumen (aplicando la misma idea del principio de cavalieri) con la siguiente fórmula

$$\mu(B_R) = V(R) = \int_0^R A(r)dr \tag{5.1}$$

donde $A(r)$ es el área de la esfera de radio r. A partir del teorema fundamental del cálculo podemos expresar el área de la esfera como la derivada del volumen:

$$\frac{\partial V}{\partial R} = A(R)\,. \tag{5.2}$$

- Hallar la expresión del área de la esfera.
- Adaptar los argumentos anteriores para obtener una relación entre el área y el perímetro del círculo.
- Adaptar los argumentos anteriores para obtener una relación entre el área y el perímetro de un cuadrado ¿cuál es la variable que hay que utilizar? Sugerencia: no es el lado.

NOTA: En la próxima práctica veremos cómo medir bolas y esferas en dimensiones mayores.

Ejercicio 22 *Campo gravitatorio :* Consideremos un cuerpo material con densidad $\varrho(x,y,z)$. que ocupa la región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. A partir de las leyes de Newton, se sabe que el **vector** campo gravitatorio que aparece en el punto de coordenadas cartesianas (x,y,z) está dado por la siguiente integral, escrita en forma vectorial con $\mathbf{r} = (x,y,z)$, las coordenadas del punto donde queremos medir el campo, $\mathbf{r}' = (x',y',z')$, las coordenadas de un punto genérico del cuerpo y G una constante universal:

$$E(\mathbf{r}) = -G \iint_\Omega \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,\varrho(\mathbf{r}')\,dV(\mathbf{r}')\,.$$

Supongamos que el cuerpo ocupa una región **acotada en el espacio**, digamos $\Omega \subseteq B_M(0)$. Sea η un vector unitario; demostrar que si $\eta \perp \mathbf{r}$ entonces $\langle E(\mathbf{r})|\eta\rangle \to 0$ cuando $\|\mathbf{r}\| \to +\infty$. Es decir, para puntos *lejanos*, el campo puede aproximarse por el campo gravitatorio que se obtiene al concentrar la masa total M en el origen: $E(\mathbf{r}) = -MG\dfrac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$.