Análisis II–Análisis matemático II–Matemática 3

Práctica 2
Cambio de variables y aplicaciones

Ejercicio 1 Sean $D^* = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y P la transformación de coordenadas polares a cartesianas, es decir, $P(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Mostrar que $P(D^*) = D$. ¿Es biyectiva P?
2. ¿En que transforma P el rectángulo $[r, r + \Delta r] \times [\theta, \theta + \Delta\theta]$?
3. Calcular la matriz $DP(r,\theta)$. ¿En que transforma la aplicación dada por esta matriz al rectángulo dado en b)? ¿Y en el caso $r = 0$?
4. Escribir la demostración de la fórmula de cambio de variables en este caso (haciendo los dibujos correspondientes).

Ejercicio 2 Sean $D_1 = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 4\pi\}$ y P la transformación del ejercicio anterior.

1. Hallar $D = P(D_1)$.
2. Calcular $\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ y $\int_{D_1} r^2 J\, drd\theta$ siendo J el jacobiano de la transformación polar.

¿Dan igual las dos integrales? ¿Por qué?

Ejercicio 3 Sea $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (4u, 2u + 3v)$. Sea D^* el rectángulo $[0,1] \times [1,2]$. Hallar $D = T(D^*)$.

Haciendo un **c**ambio de variables para transformarlas en integrales sobre D^*, calcular:

1. $\int_D xy\, dxdy$
2. $\int_D (x - y)\, dxdy$

Ejercicio 4 Idem el ejercicio 3 para $T(u,v) = (u, v(1 + u))$.

Ejercicio 5 Sean $T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ y $D^* = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, b \geq 0\}$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular su área.

Ejercicio 6 Sean $T(u,v)$ y D los del ejercicio 5. Calcular:

$$\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

haciendo ese cambio de variables.

Ejercicio 7 Calcular $\int_D (x^2 + y^2)^{3/2}\, dxdy$ donde D es el disco de centro en el origen y radio 2.

Ejercicio 8 Hallar el área dentro de la curva $r = 1 + \sin\theta$.

Ejercicio 9 Dado el paralelogramo P del plano xy con vértices $(0,0), (2,10), (3,17)$ y $(1,7)$

1. Hallar una transformación lineal que convierta a P en un rectángulo R del plano uv con vértices opuestos en $(0,0)$ y $(4,2)$.
2. Calcular la integral $\int_P xy\,dxdy$ transformándola en una integral sobre el rectángulo R.

Ejercicio 10 Es sabido, aunque difícil de demostrar, que una primitiva de la función e^{-x^2} no puede expresarse en términos de las funciones elementales usuales. Esto dificulta el cálculo de $\int_a^b e^{-x^2}\,dx$. Sin embargo, el siguiente truco notable permite calcular de manera simple la integral impropia $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$:

1. Observar que $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$
2. Calcular la integral de a) como límite de integrales en círculos utilizando coordenadas polares.

Ejercicio 11 Integrar $ze^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 4$.

Ejercicio 12 Hallar el área acotada por la curva dada por la ecuación $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$. Esta curva se llama lemniscata. ¿Por qué?.

Ejercicio 13 Calcular el volumen de un cilindro con base circular de radio r y altura h.

Ejercicio 14 Integrar $x^2 + y^2 + z^2$ sobre el cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$.

Ejercicio 15 Sea B la bola unitaria, es decir, $B = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Calcular:

$$\int_B \frac{dxdydz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}$$

Ejercicio 16 Calcular $\int_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$, donde A esta determinado por las condiciones $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x + y \geq 1$.

Ejercicio 17 Calcular:

$$\int_S \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde S es el sólido acotado por dos esferas de radios a y b con $0 < b < a$ y centradas en el origen.

Ejercicio 18 Calcular $\int_B z\,dxdydz$ donde B es la región sobre el plano xy dentro del cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ y debajo del cono dado por $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Ejercicio 19 Sea E el elipsoide dado por $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1$.

1. Hallar el volumen de E.

2. Calcular
$$\int_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)]\, dxdydz$$

Ejercicio 20 Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ si la densidad es $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejercicio 21 Llamamos B_R^n a la esfera de radio R en $\mathbb{R}^n$.

1. Pruebe que $\operatorname{vol}(B_R^n) = R^n \operatorname{vol}(B_1^n)$
2. Usando inducción y el principio de Cavalieri pruebe que
$$\operatorname{vol}(B_1^n) = 2 \operatorname{vol}\left(B_1^{n-1}\right) \int_0^1 \left(1 - x_n^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dx_n = \operatorname{vol}\left(B_1^{n-1}\right) \int_0^1 x^{-1/2} (1-x)^{\frac{n-1}{2}} dx.$$
Nota: Se define la función
$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \int_0^1 x^{-1/2} (1-x)^{\frac{n-1}{2}} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}\right)}$$
siendo $\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5....(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi}$ (para $m \in \mathbb{N}$)
3. Calcule $\operatorname{vol}\left(B_1^4\right)$

Ejercicio 22 Calcule $\operatorname{vol}\left(B_1^4\right)$ usando las coordenadas polares dobles en $\mathbb{R}^4$ (No son las coordenadas esferéricas en $\mathbb{R}^4$).
$$x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\operatorname{sen}\theta,\ x_3 = \rho\cos\psi,\ x_4 = \rho\operatorname{sen}\psi$$
donde $r, \rho \geq 0$ y $0 \leq \theta, \rho \leq 2\pi$.

Ejercicio 23 Hallar el centro de masa del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$, si la densidad es $\rho = (x^2 + y^2)z^2$.

Ejercicio 24 Si un sólido W tiene densidad uniforme ρ, el *momento de inercia* alrededor del eje x esta definido por,
$$I_x = \int_W \rho(y^2 + z^2)\, dxdydz$$
y análogamente se definen I_y e I_z. Sea ahora W el sólido con densidad constante acotado por arriba por el plano $z = a$ y por debajo por el cono descripto en coordenadas esféricas por $\phi = k$, donde k es una constante tal que $0 < k < \pi/2$. Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje z.

Ejercicio 25 Hallar el momento de inercia alrededor del eje y para la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ si la densidad de masa es una constante ρ.

Ejercicio 26 Dada la función
$$r(\varphi) = 1 - \frac{1}{2}\cos(2\varphi) \quad \text{para } 0 \leq \varphi \leq \pi$$
que determina una curva en el plano xz (curva en coordenadas polares considerando que φ es el ángulo que forma el radio vector r con el eje z).

Sea S la superficie de revolución alrededor del eje z generada por esta curva.

Calcular el volumen encerrado por esta superficie.

Sugerencia: Pruebe y use la identidad trigonométrica:
$$1 - \frac{1}{2}\cos(2\varphi) = \frac{3}{2} - \cos^2(\varphi)$$