Análisis II–Análisis matemático II–Matemática 3

Práctica 3

Integrales de Trayectoria y de Superficie

1 Integrales de Trayectoria

Ejercicio 1 Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las trayectorias siguientes en el valor especificado de t.

1. $r(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t = 0$
2. $\sigma = (\cos^2 t, 3t - t^3, t), \quad t = 0$
3. $\sigma = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}}), \quad t = 1$
4. $\sigma = (0, 0, t), \quad t = 1$

Ejercicio 2 ¿Qué fuerza actúa en el ejercicio 1.1), sobre una partícula de masa m en $t = 0$ si sigue la trayectoria dada?

Ejercicio 3 Suponer que una partícula sigue la trayectoria $\sigma = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que sale por una tangente en $t = 1$. Hallar la ubicación de la partícula en $t = 2$. Suponer que ninguna fuerza actúa sobre ella después del tiempo $t = 1$.

Ejercicio 4 Considerar el punto con función de posición $\sigma : t \to (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Hallar la velocidad, rapidez, y la longitud de arco entre los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(1)$. Observar que σ describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando; su curva se conoce como cicloide.

Ejercicio 5 Calcular la longitud de arco de la curva σ en el intervalo $[a, b]$, siendo:

1. $\sigma = (t, t^2) \quad a = 0, \quad b = 1$
2. $\sigma = (\sqrt{t}, t + 1, t) \quad a = 10 \quad b = 20$

Ejercicio 6 La longitud de arco $s(t)$ para una trayectoria dada σ, definida por $s(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\|\, d\tau$,representa la distancia que una partí cula, viajando por la trayectoria σ, habrá recorrido hasta el instante de tiempo t si comienza en el instante a, es decir, da la longitud de arco entre $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$. Encontrar las funciones longitud de arco para las curvas $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$ y $\beta(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), t)$, con $a = 0$.

Ejercicio 7 Sea α cualquier trayectoria diferenciable cuya velocidad nunca es cero. Sea $s(t)$ la función longitud de arco para α. Sea $t(s)$ la función inversa de $s(t)$.

1. Probar que la curva $\beta = \alpha \circ t$ tiene velocidad unitaria, es decir, $\|\beta'(s)\| = 1\, \forall s$.

2. Sea σ la trayectoria $\sigma = (a\cos t, a\text{sen}t, bt)$, con $t > 0$. Encontrar una trayectoria que trace la misma curva que σ pero con velocidad unitaria.

Ejercicio 8 Evaluar las siguientes integrales de trayectorias $\int_\sigma f(x, y, z)\, ds$, donde

1. $f(x, y, z) = x + y + z, \quad \sigma : t \to (\text{sen}t, \cos t, t), \quad t \in [0, 2\pi]$
2. $f(x, y, z) = \cos z, \quad \sigma$ como en la parte 1.
3. $f(x, y, z) = x\cos z, \quad \sigma : t \to (t, t^2, 0), \quad t \in [0, 1]$

Ejercicio 9 1. Mostrar que la integral de trayectoria de $f(x, y)$ a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

2. Calcular la longitud de arco de $r = 1 + \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ejercicio 10 Sea $f(x, y) = 2x - y$ y $\sigma(t) = (t^4, t^4)$ con $-1 \leq t \leq 1$. Calcular $\int_\sigma f ds$ e interpretar geométricamente la respuesta.

Ejercicio 11 Suponer que el semicírculo parametrizado por:

$$\sigma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3,\ \theta \to (0, a\sin\theta, a\cos\theta),\ a > 0,$$

está hecho de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

1. ¿Cuál es la masa total del alambre?
2. ¿Dónde está el centro de masa de esta configuración de alambre?

Ejercicio 12 Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, sea la longitud de la gráfica de f en $[a, b]$ definida como la longitud de la trayectoria $t \to (t, f(t))$ para $t \in [a, b]$.

1. Mostrar que la longitud de la gráfica de f en [a,b] es

$$\int_b^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

2. Hallar la longitud de la gráfica de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

Ejercicio 13 Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de cada una de las trayectorias siguientes:

1. $\sigma = (t, t, t), \quad 0 \leq t \leq 1$
2. $\sigma = (\sin t, 0, \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Ejercicio 14 Evaluar cada una de las integrales siguientes:

1. $\int_\sigma x\,dy - y\,dx, \quad \sigma = (\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$

2. $\int_\sigma x\,dx + y\,dy, \quad \sigma = (\cos(\pi t), \sin(\pi t)), \quad 0 \le t \le 2$

Ejercicio 15 Considerar la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.

Ejercicio 16 Sea σ una trayectoria suave. Suponer que $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\sigma'(t)$ en σ. Mostrar que

$$\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Ejercicio 17 Si $\mathbf{F}$ es paralelo a $\sigma'(t)$ en σ, mostrar que

$$\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\sigma ||\mathbf{F}||\,ds.$$

(Por paralelo a $\sigma'(t)$ se entiende que $\mathbf{F}(\sigma) = \lambda(t)\sigma'(t)$, donde $\lambda(t) > 0$.)

Ejercicio 18 ¿Cuál es el valor de la integral de un campo gradiente alrededor de una curva cerrada C?

Ejercicio 19 Suponer que $\nabla f(x, y, z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$. Si $f(0, 0, 0) = 5$, hallar $f(1, 1, 2)$.

Ejercicio 20 Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido [para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$] por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z).$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2), a lo largo de cualquier trayectoria, depende sólo de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

2 Integrales de Superficie

Ejercicio 21 Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en **c**oordenadas cartesianas y graficar

1. $r = k$ $(k = cte)$.

2. $\varphi = k$, $0 < k < \pi/2$.

En cada uno de los casos anteriores dé el **v**ector normal en cada punto.

Ejercicio 22 1. Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\Phi_1(u, v) = (u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}) \qquad (a, b \text{ no nulos})$$

$$\Phi_2(u, v) = (au\ \cos(v), bu\ \sin(v), u^2)$$

son dos parametrizaciones del **paraboloide elíptico**.

2. Mostrar que

$$\Phi(u, v) = ((a + b\cos(u))\sin(v), (a + b\cos(u))\cos(v), b\sin(u))$$

$0 < b < a$, y $u, v \in [0, 2\pi]$, es una parametrización del **toro**.

Ejercicio 23 Considerar la superficie

$$x = u\ \cos(v) \qquad y = u\ \text{sen}(v) \qquad z = u$$

Es diferenciable esta superficie ? . Es suave ?.

Ejercicio 24 Si la superficie es el gráfico de una función diferenciable $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, demostrar que se trata de una superficie suave. Qué pasa si g no es diferenciable ?.

Ejercicio 25 Encontrar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto especificado

1. $x = 2u$, $y = u^2 + v$, $z = v^2$ en el punto (0,1,1).
2. $x = u^2 - v^2$, $y = u + v$, $z = u^2 + 4v$ en el punto (-1/4,1/2,2).

Ejercicio 26 Encontrar una fórmula para el plano tangente a la superficie $x = h(y, z)$ en el punto $(h(y_0, z_0), y_0, z_0)$

Ejercicio 27 Sea $\phi(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = r\ \cos(\theta) \qquad y = r\ \text{sen}(\theta) \qquad z = \theta$$

Graficar. Hallar el vector normal en cada punto. Y por último hallar su área.

Ejercicio 28 Sea $\phi(u, v) : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^3$

$$\phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$$

Calcular su área.

Ejercicio 29 Calcular el área de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$. (bóveda de Viviani).

Ejercicio 30 Sea la curva $z = f(x)$ $x \in [\alpha, \beta]$ con f y α positivos, girada alrededor del eje z. Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$, y $a = b = 1$.

Ejercicio 31 Calcular $\int_S xy\, dS$ donde S es el borde del tetraedro con lados $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $x = y$.

Ejercicio 32 Calcular $\int_S (x + y + z) dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Ejercicio 33 Hallar la masa de una superficie esférica de radio r tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia entre (x, y, z) y el punto (0,0,1).

Ejercicio 34 Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Ejercicio 35 Sea la temperatura de un punto de $\mathbb{R}^3$ dada por la función $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$ calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo $-\nabla T$) a traves de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, orientada de forma que la normal en el punto $(0, 0, \sqrt{2})$ sea (0,0,1).

Ejercicio 36 Sea S la superficie de la esfera unitaria orientada segun la normal exterior. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial y $\mathbf{F}_r$ su componente radial. Probar que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r \mathrm{sen}(\phi) d\phi\, d\theta$$

Ejercicio 37 Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ con $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

Ejercicio 38 Sean S una superficie y C una curva cerrada que es el borde de S. Verificar que si $\mathbf{F}$ es un campo gradiente ($\mathbf{F} = \nabla f$) entonces

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Ejercicio 39 Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x^2, yx^2)$ que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.