Análisis II–Análisis matemático II–Matemática 3

Práctica 4
Teoremas Integrales del Análisis Vectorial

Ejercicio 1 Verificar el teorema de Green para el disco D con centro $(0,0)$ y radio R y las siguientes funciones:

1. $P(x,y) = xy^2,\ Q(x,y) = -yx^2$
2. $P(x,y) = 2y,\ Q(x,y) = x.$

Ejercicio 2 Verificar el teorema de Green y calcular $\int_C y^2\,dx + x\,dy$, siendo C la curva recorrida en sentido positivo:

1. Cuadrado con vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$
2. Elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
3. $C = C_1 \cup C_2$, donde $C_1 : y = x$, $x \in [0,1]$, y $C_2 : y = x^2$, $x \in [0,1]$.

Ejercicio 3 Usando el teorema de Green, hallar el área de:

1. El disco D con centro $(0,0)$ y radio R
2. La región dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ejercicio 4 Sea D la región encerrada por el eje x y el arco de la cicloide:

$$x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

Usando el teorema de Green, calcular el área de D.

Ejercicio 5 Probar la fórmula de integración por partes: Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio elemental, ∂D su frontera orientada en sentido antihorario y $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normal exterior a D, entonces

$$\int_D u\, v_x\, dx\, dy = -\int_D u_x\, v\, dx\, dy + \int_{\partial D} u\, v\, n_1\, ds,$$

para todo par de funciones u, $v \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$.

Ejercicio 6 Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \ge 0$, y el campo vectorial radial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$.

Ejercicio 7 Sea S la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies S_1 y S_2; donde S_1 es el conjunto de (x,y,z) con $x^2 + y^2 = 1,\ \ 0 \le z \le 1$ y S_2 es el conjunto de (x,y,z) con $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, $z \ge 1$. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.

Ejercicio 8 1. Considerar dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S. Describir, mediante dibujos, como deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

2. Deducir que si S es una superficie cerrada, entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(una superficie cerrada es aquella que constituye la frontera de una región en el espacio; así , por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada).

3. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, y $\mathbf{F} = (\sin xy, e^x, -yz)$.

Ejercicio 9 Verificar el teorema de Stokes para la helicoide $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, \pi/2]$ y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y)$

Ejercicio 10 Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo $\mathbf{F} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ y la superficie S, en cada uno de los siguientes casos:

1. $S =$ círculo de radio $a > 0$ en el plano $z = 0$.
2. $S =$ región del plano $z = 0$ entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x + y = 1$.

Ejercicio 11 1. Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitacional $\mathbf{F} = -GmM\frac{\mathbf{X}}{||\mathbf{X}||^3}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$, cuando el punto de aplicación de $\mathbf{F}$ se desplaza de $(1, 1, 1)$ a $(2, 2, 2)$ a lo largo de

   (a) el segmento que une los dos puntos
   (b) una poligonal formada por aristas paralelas a los ejes el cubo del cual $(1, 1, 1)$ y $(2, 2, 2)$ son vértices opuestos diagonalmente.

2. Comprobar que la integral curvilínea sólo depende de los puntos inicial y final. Calcular $\nabla \times \mathbf{F}$ y hallar una función potencial $f : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}$ para $\mathbf{F}$.

Ejercicio 12 Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F}$ en el plano es el gradiente de una función escalar f. Si existe dicha f, hallarla.

1. $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$
2. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$
3. $\mathbf{F}(x, y) = (\cos xy - xy\sin xy, x^2\sin xy)$

Ejercicio 13 Evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde

1. $\mathbf{F} = (2xyz + \sin x, x^2z, x^2y)$, y C es la curva que está parametrizada por $(\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$, $0 \leq t \leq \pi$.
2. $\mathbf{F} = (\cos xy^2 - xy^2\sin xy^2, -2x^2y\sin xy^2, 0)$, y C es la curva $(e^t, e^{t+1}, 0)$, $-1 \leq t \leq 0$.

Ejercicio 14 1. Rehacer el ejercicio 34) de la práctica 3, usando el teorema de Gauss.

2. Idem 1), pero con el ejercicio 32) de la misma práctica.

Ejercicio 15 Verificar el teorema de la divergencia para $\mathbf{F} = (x, y, z)$ y Ω el sólido intersección de $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Ejercicio 16 Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, siendo $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ y S la superficie interior de la esfera de radio R. (Sugerencia: usar el teorema de Gauss).

Ejercicio 17 Dada la curva en el plano zx:

$$r(\varphi) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\,(2 - \cos(2\varphi)) \quad \text{para } \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$$

(aquí φ es el ángulo que forma el radio vector con el semieje positivo de las z), sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje z.

Calcular el **flujo** a través de S (en el sentido "externo" según el dibujo que sigue) del campo

$$F(x, y, z) = (x, y, -2z)$$

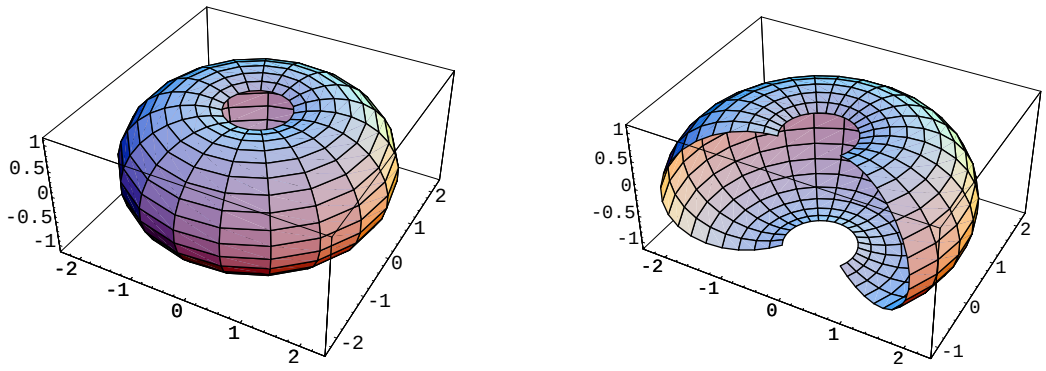

Figure 1:

En el primer dibujo se muestra la superficie S, en el segundo se realizó un corte de la misma para que se aprecie mejor su forma.

Ejercicio 18 Rehacer el ejercicio 2) de esta práctica usando el teorema de Gauss.

Ejercicio 19 Usando el teorema de Gauss, probar las *identidades de Green*:

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_\Omega (f \Delta g - \nabla f \cdot \nabla g)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\int_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_\Omega (f \Delta g - g \Delta f)\, dx\, dy\, dz$$

Aquí $\mathbf{n}$ es la normal exterior al dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, y f, g son de clase C^2.

Ejercicio 20 Calcular el flujo del campo $F(x, y, z) = (0, 0, a^2 - x^2 - y^2)$ a través de las siguientes **s**ecciones oblicuas del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$:

1. **S**ección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $y + z = 1$, de modo que la normal en el punto $(0, 0, 1)$ apunte en la dirección $(0, 1, 1)$.

2. **S**ección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $z = 0$, de modo que la normal en el punto $(0, 0, 0)$ apunte en la dirección $(0, 0, 1)$.

¿Depende el flujo del área de la sección?. **J**ustifique.