**Análisis II–Matemática 3–Análisis Matemático 2**
Curso de verano 2008
Práctica 7: DIAGRAMAS DE FASE

**Ejercicio 1** Realizar un gráfico aproximado de las líneas de flujo de los siguientes campos vectoriales lineales.

(a) $F(x,y) = (x,y)$ (b) $F(x,y) = (-y,x)$ (c) $F(x,y) = (y,0)$ (d) $F(x,y) = (-x+2y,-2x-y)$

**Ejercicio 2** Realizar un gráfico aproximado de las líneas de flujo de los siguientes campos vectoriales no lineales.

(a) $F(x,y) = (x^2,y^2)$ (b) $F(x,y) = (x,y^2)$ (c) $F(x,y) = (x,x^2)$

**Ejercicio 3** Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz cualquiera, esbozar el diagrama de fases (alrededor del origen) correspondiente a la ecuación $\dot{x} = Ax$, analizando cuidadosamente todos los casos cualitativamente distintos; es decir, en función del tipo de raíces que tenga su polinomio caracteístico: reales, complejas, simples o múltiples, etc.

**Ejercicio 4** Para cada una de las siguientes ecuaciones no lineales: realizar un gráfico cualitativo $x$ vs. $t$, hallar los puntos de equilibrio y analizar la estabilidad de los mismos.

(a) $\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$ (b) $\dot{x} = 1 - x^2$ (c) $\dot{x} = x^3 - x$

**Ejercicio 5** Para cada uno de los siguientes sistemas no lineales hallar los puntos de equilibrio y esbozar el diagrama de fases alrededor de cada uno de ellos.

$$(a)\ \begin{cases} \dot{x} = xe^y \\ \dot{y} = -1 + y + \operatorname{sen}(x) \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} \dot{x} = e^{x-y} - 1 \\ \dot{y} = xy - 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 6** Sea $V(x,y) = ax^2 + by^2 + x^2y$, con $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos. Consideremos el sistema $\dot{X} = -\nabla V(X)$, donde $X = (x,y)^t$.

- Verificar que el origen es un punto de equilibrio y clasificar su estabilidad en función de los parámetros $a$ y $b$.
- Hallar los restantes puntos de equilibrio y analizar su estabilidad.

**Ejercicio 7** Consideremos el problema unidimensional $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x) \end{cases}$ donde $V(x)$ es una función continua. (En la interpretación mecánica $V$ es el potencial y $-V'$, la fuerza.)

- Demostrar que $h(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$ (la energía) es una constante del movimiento; esto es, $h(x(t),y(t)) = h(x(0),y(0)) = h(0)$.
- Poner $V(x) = x^2$ y esbozar un diagrama de fases para diferentes niveles de $h(x,y)$. Verificar que todas las trayectorias son acotadas. Utilizar la cantidad conservada obtenida en el punto anterior para obtener la posición máxima en funcion del dato inicial. (Se trata del oscilador armónico.)

- Poner $V(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$, con $x \in (0, +\infty)$. Esbozar el diagrama de fases para diferentes niveles de la energía. Describir cualitativamente el movimiento para valores iniciales tales que $h(0)$ es positivo, negativo o nulo. (Se trata del movimiento radial de una partícula sometida a un campo gravitatorio, la cantidad $\frac{1}{x^2}$ suele interpretarse como un *potencial centrífugo*.)

- Considerar el potencial del punto anterior. Tomar un $x_0$ cualquiera y obtener el valor mínimo de $|y_0|$ para el cual la trayectoria cuyo nivel de energía es $h(x_0, y_0)$ es no acotada. (La cantidad $y_0$ es la *velocidad de escape*.)

- Considerar $V(x) = 1 - cos(x)$ (el potencial asociado al péndulo). Esbozar el diagrama de fases para diferentes valores de la energía. Verificar que todas las trayectorias están acotadas en el eje $y$. Para cada $x_0 \in [-\pi, \pi]$ obtener la *velocidad de escape*.