Análisis II–Análisis matemático II–Matemática 3.

1er. cuatrimestre de 2008

Práctica 2 - Integrales de superficie.

Definición .1. *Una superficie paramétrica (superficie a secas para nosotros) es un conjunto de puntos del espacio que puede describirse por medio de dos parámetros. Más precisamente, $\mathcal{S}$ es una superficie si existen funciones continuas $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ definidas en un dominio elemental $D \subset \mathbb{R}^2$ tales que $(x,y,z) \in \mathcal{S}$ si y sólo si existe $(u,v) \in D$ con $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$.*

En este caso, llamamos a $T : D \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ una parametrización de $\mathcal{S}$.

Definición .2. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie, $P_0 \in \mathcal{S}$ y Π_0 un plano por P_0. Sea ν_0 un vector de longitud 1 perpendicular a Π_0. Decimos que Π_0 es el plano tangente a $\mathcal{S}$ en P_0 si la recta por P y P_0 con $P \in \mathcal{S}$ tiende a ser perpendicular a ν_0 a medida que P se acerca a P_0. Más precisamente, si*

$$\frac{P - P_0}{\|P - P_0\|} \cdot \nu_0 \to 0 \quad \text{cuando } P \to P_0 \text{ con } P \in \mathcal{S}.$$

Aquí $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ denota el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

Observación .1. *Sea $P_0 \in \mathcal{S}$ y ν_0 un vector de norma 1. Sea Π_0 el plano perpendicular a ν_0 por P_0. Entonces Π_0 es el plano tangente a $\mathcal{S}$ en P_0 si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{S}$ y $\|P - P_0\| < \delta$ se sigue que*

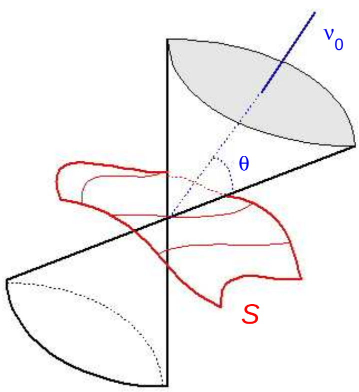
$$\left| \frac{P - P_0}{\|P - P_0\|} \cdot \nu_0 \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Como

$$\frac{P - P_0}{\|P - P_0\|} \cdot \nu_0 = \cos \alpha(P)$$

donde $\alpha(P)$ es el ángulo entre el vector $P - P_0$ y ν_0, la condición (1) dice que, en la bola $B_\delta(P_0)$, la superficie $\mathcal{S}$ queda fuera del cono de eje ν_0 y apertura $\theta \in [0, \pi/2]$ donde $\cos\theta = \varepsilon$.

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, la condición geométrica que caracteriza al plano tangente en P_0 es que para todo cono con eje ν_0, exista un entorno de P_0 tal que, en ese entorno, la superficie $\mathcal{S}$ queda fuera del cono.



Proposición .1. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie. Si existe una parametrización $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ inyectiva, diferenciable en $(u_0, v_0) \in D$ tal que los vectores derivados $T_u(u_0, v_0)$, $T_v(u_0, v_0)$ no son paralelos y son no nulos, el plano Π_0 por $P_0 = T(u_0, v_0)$ que determinan estos dos vectores derivados es tangente a $\mathcal{S}$ en P_0.*

Observación .2. *En este caso se puede tomar*

$$\nu_0 = \frac{T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)}{\|T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)\|}$$

donde $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ denota el producto vectorial de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

Si $\nu_0 = (a_0, b_0, c_0)$, la ecuación del plano tangente es (aquí $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$),

$$\Pi_0 : \ a_0(x - x_0) + b_0(y - y_0) + c_0(z - z_0) = 0.$$

Notemos que no es necesario tomar un versor ν_0 para encontrar la ecuación de Π_0. Es decir, si

$$T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) = (a, b, c),$$

se tiene

$$\Pi_0 : \ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Definición .3. *Una superficie $\mathcal{S}$ es suave si tiene plano tangente en todos sus puntos y la recta $L(P)$ perpendicular al plano tangente en $P \in \mathcal{S}$ varía continuamente con P.*

Proposición .2. *Si $\mathcal{S}$ es una superficie que tiene una parametrización $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ inyectiva, C^1, con $T_u \times T_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in D$, se tiene que $\mathcal{S}$ es suave.*

Definición .4. *A una parametrización T con las propiedades de la Proposición .2 la llamamos "regular".*

Proposición .3. *Sea $\mathcal{S}$ el gráfico de una función C^1, $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio elemental. Entonces $\mathcal{S}$ es una superficie suave y la ecuación del plano tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es*

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Proposición .4. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie dada en forma implícita por*

$$\mathcal{S} : \quad F(x, y, z) = 0$$

donde $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 y $\nabla F(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ para todo (x, y, z).

Entonces, $\mathcal{S}$ es una superficie suave y la ecuación del plano tangente en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Definición .5. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave y $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{S}$. Sea $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ un dominio elemental y $G : D_1 \to D$ una biyección, C^1 con Jacobiano no nulo. (Es decir, $|DG(u, v)| \neq 0$ para todo $(u, v) \in D_1$). Sea $T_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T_1(u, v) = T\big(G(u, v)\big)$. Llamamos a T_1 una **reparametrización** de T.*

Proposición .5. *Sean $\mathcal{S}$, T y T_1 como en la Definición .5. Entonces, T_1 es una parametrización regular de $\mathcal{S}$. Más aún, $T_{1u}(u, v) \times T_{1v}(u, v) = \big(T_u(G(u, v)) \times T_v(G(u, v))\big)\mathcal{J}_G(u, v)$ donde $\mathcal{J}_G$ es el determinante de la matriz asociada al diferencial de G.*

Ejercicio 1. Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar

1. $r = k \quad (k = cte)$.
2. $\varphi = k, \quad k \in (0, \pi/2]$ constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un versor normal en cada punto.

Ejercicio 2.

1. Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$ dadas por
$$\Phi_1(u, v) = (u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}) \qquad (a, b \text{ no nulos})$$
$$\Phi_2(u, v) = (au\ \cos(v), bu\ \sin(v), u^2)$$
son dos parametrizaciones del **paraboloide elíptico**.
2. Mostrar que
$$\Phi(u, v) = \big((a + b\cos(u))\sin(v), (a + b\cos(u))\cos(v), b\sin(u)\big)$$
$0 < b < a$, y $u, v \in [0, 2\pi]$, es una parametrización del **toro**.

Ejercicio 3. Considerar la superficie dada por la parametrización
$$x = u\ \cos(v) \qquad y = u\ \text{sen}(v) \qquad z = u$$
Es diferenciable esta parametrización? Es suave la superficie?

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{C}$ la curva en el plano xy dada en polares por:
$$r = 2 - \cos\theta \quad \text{para } -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$
Sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje y.

1. Dar una parametrización de S.
2. ¿Es suave esta superficie?

No desespere y siga hasta el final.

Ejercicio 5. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de radio a y centro en el origen en un punto (x_0, y_0, z_0) genérico de la esfera.

Ejercicio 6. Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto (0,1,1) a la superficie dada por la parametrización
$$x = 2u, \qquad y = u^2 + v, \qquad z = v^2.$$

Ejercicio 7. Probar la Porposición .5

Proposición .6. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave y $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{S}$. Sea $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de T. Sea f una función continua sobre $\mathcal{S}$. Entonces, el cálculo de $\int_{\mathcal{S}} f\, dS$ da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización T o la parametrización T_1.*

Ejercicio 8. Probar la Proposición .6.

Ejercicio 9. Sea $\phi(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$ dada por
$$x = r\ \cos(\theta) \qquad y = r\ \text{sen}(\theta) \qquad z = \theta$$
la parametrización de una superficie $\mathcal{S}$. Graficar $\mathcal{S}$, hallar un vector normal en cada punto y hallar su área.

Ejercicio 10. Sea $\phi(u,v) : D \mapsto \mathbb{R}^3$ (D el disco unitario centrado en el origen)

$$\phi(u,v) = (u - v, u + v, uv)$$

la parametrización de una superficie. Calcular su área.

Ejercicio 11. Calcular el área de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$. (bóveda de Viviani).

Ejercicio 12. Sea la curva $z = f(x)$ $x \in [\alpha, \beta]$ con f y α positivos, girada alrededor del eje z. Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$, y $a = b = 1$.

Ejercicio 13. Sea $\mathcal{C}$ la curva

$$\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ en el plano xy. Sea S la superficie que se obtiene al girar la curva $\mathcal{C}$ alrededor del eje x

1. Hallar una parametrización de S.
2. Hallar el área de S.

Ejercicio 14. Calcular $\int_S xy\, dS$ donde S es el borde del tetraedro con lados $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $x = y$.

Ejercicio 15. Calcular $\int_S (x + y + z) dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Ejercicio 16. Hallar la masa de una superficie esférica de radio r tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia entre (x, y, z) y el punto $(0, 0, r)$.

Definición .6. *Decimos que una superficie $\mathcal{S}$ es orientable si hay una forma de elegir en cada punto P de $\mathcal{S}$ un único versor normal $\nu(P)$ de modo que la función vectorial que esta elección define sobre $\mathcal{S}$ resulte continua.*

Por ejemplo, si $\mathcal{S}$ es un gráfico, $\mathcal{S}: \quad z = f(x, y)$, se puede elegir en todos los puntos un versor normal que apunte hacia arriba (es decir, con componente z positiva). Esta elección es continua en $\mathcal{S}$.

Si $\mathcal{S}$ es el borde de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de tipos I, II o III, se puede elegir como $\nu(P)$ la normal que apunta hacia afuera de Ω.

Proposición .7. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave y $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{S}$. Para cada $P \in \mathcal{S}$, sea*

$$\nu(P) = \frac{T_u(u,v) \times T_v(u,v)}{\|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\|}, \quad \text{donde } (u,v) \text{ es tal que } P = T(u,v).$$

Entonces, esta elección de versor normal orienta la superficie $\mathcal{S}$. En este caso, decimos que $\mathcal{S}$ está orientada por la parametrización T.

Definición .7. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie orientada por el versor normal $\nu(P)$. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$. Llamamos flujo de $\mathbf{F}$ a través de $\mathcal{S}$ a la integral*

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \; := \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS.$$

Proposición .8. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave orientada por la parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sea $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de T que preserva la orientación. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$. Entonces, el cálculo de $\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S}$ da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización T o la parametrización T_1. Si T_1 invierte la orientación, los cálculos difieren sólo en el signo.*

Ejercicio 17. Probar la Proposición .8.

Ejercicio 18. Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Ejercicio 19. Si la temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ está dada por la función $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$, calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo $-\nabla T$) a traves de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \le y \le 2$, orientada de forma que la normal en el punto $(0, 0, \sqrt{2})$ sea (0,0,1).

Ejercicio 20. Sea S la superficie de la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi\, d\theta$$

Ejercicio 21. Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S}$ con $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

Ejercicio 22. Sean S una superficie orientada y C una curva cerrada simple que es el borde de S con alguna de sus dos posibles orientaciones. Verificar que si $\mathbf{F}$ es un campo gradiente ($\mathbf{F} = \nabla f$) entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\,\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s}$$

Ejercicio 23. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x^2, yx^2)$ que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.