Análisis Complejo - Primer parcial

2001 - Primer Cuatrimestre

1. Sean f, g funciones enteras tales que $\mid f(z) \mid \leq \mid g(z) \mid$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
   Pruebe que existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $f = a.g$

2. Sea q una función holomorfa en un entorno de $z_0 \in \mathbb{C}$, tal que $q(z_0) = 0$ y $q'(z_0) \neq 0$. Si C_r es la curva $\mid z - z_0 \mid = r$ recorrida en sentido positivo, pruebe que

$$lim_{r \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{dz}{q(z)^2} = -\frac{q''(z_0)}{(q'(z_0))^3}$$

3. Sea f entera tal que existen $M, R > 1$ tales que

$$\mid f(z) \mid < M \ \log \mid z \mid \qquad \text{para todo} \ \mid z \mid > R$$

   Pruebe que f es constante.

4. Sea Ω abierto conexo, $0 \in \Omega$ una singularidad aislada de f holomorfa.
   (a) Suponiendo que 0 es un polo de f, pruebe que NO existe $lim_{z \to 0} \ Re\{f(z)\}$.
   (b) En el caso general, pruebe que 0 no puede ser un polo de $g(z) = e^{f(z)}$.

5. Sea $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ en $\mid z \mid < R$. Llamemos $M(r) = \sup_{|z| \leq r} \mid f(z) \mid$.
   (a) Pruebe que $\mid a_n \mid \leq \frac{M(r)}{r^n}$ para todo $0 < r < R$, para todo n.
   (b) Pruebe que si $\mid a_n \mid = \frac{M(r)}{r^n}$ para algún $r > 0$ y algún n, entonces $f(z) = a_n z^n$.