Análisis Complejo - Segundo parcial

2001 - Primer Cuatrimestre

1. Pruebe, integrando en un contorno anular en el primer cuadrante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ dx}{(x^4+1)^2} = \frac{5\pi}{32\ sen\left(\frac{3\pi}{8}\right)}$$

2. (a) Pruebe la identidad

$$\frac{2}{e^z - e^{-z}} = \frac{1}{z} + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k\ 2z}{z^2 + k^2\pi^2}$$

   (b) Pruebe la identidad

$$\tanh(z) = \frac{z\prod_{k\geq 1}\left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)}{\prod_{k\geq 0}\left(1 + \frac{z^2}{(k+\frac{1}{2})^2\pi^2}\right)}$$

3. Sea $f : B \to B$ holomorfa, tal que $f(0) = 0$. Tomemos $p \in B$. Si $\{z_n\} \subset B$ es el conjunto de preimagenes de p, entonces

$$\mid p \mid \leq \prod_{n\geq 1} \mid z_n \mid$$

   Sugerencia: considere $g = \alpha_p \circ f$.

   Puede vincular este resultado con algún resultado más conocido?

4. (a) Sea Ω abierto conexo, $\mathcal{F}$ una familia normal de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$. Pruebe que $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ es normal en $\mathcal{H}(\Omega)$.

   (b) Sea d es un entero positivo y $\{p_n\}$ una familia normal de polinomios tales que $gr(p_n) \leq d$ para todo n. Pruebe que si existen $d+1$ numeros complejos distintos tales que p_n converge puntualmente en cada uno de estos puntos, entonces existe un polinomio p tal que p_n converge uniformemente sobre compactos a p.