Análisis Complejo

Práctica 0 - Generalidades

2001 - Primer Cuatrimestre

Algebrosidades....

1. Las transformaciones $\mathbb{R}-lineales$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ se suelen identificar con las matrices de 2×2 con coeficientes reales. Halle condiciones necesarias y suficientes para que la matriz

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sea una transformación $\mathbb{C}-lineal$ de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, con la acción definida como $z = T(w)$, donde si $w = Re(w) + iIm(w)$, entonces

$$\begin{pmatrix} Re(z) \\ Im(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Re(w) \\ Im(w) \end{pmatrix}$$

2. Pruebe que las matrices $\mathbb{C}-lineales$ del ejercicio anterior forman un subanillo.

3. Suponga que identifica al número complejo $z = a + ib$ con la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

   (a) Es la aplicación asociada $\mathbb{C}-lineal$?

   (b) Si $w = c+id$, pruebe que la suma de matrices "devuelve" la suma de numeros complejos (via esta identificacion)

   (c) Si $w = c+id$, pruebe que el producto usual de matrices devuelve el producto de numeros complejos.

   (d) Que operación de matrices representa la conjugación $\overline{z} = a - ib$?

   (e) Que operación devuelve la inversa de un complejo?

   (f) Concluya que el cuerpo de los numeros complejos se identifica con un subanillo de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Usualmente a un número complejo no nulo lo podemos descomponer como

$$z = a + ib = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Al número real que verifica $\theta = arctg(b/a) \quad (a \neq 0), cos(\theta) = a/\sqrt{a^2+b^2}$ se lo denomina **argumento** de z. Se lo denomina **argumento principal** cuando $-\pi < \theta \leq \pi$. Si $a = 0$, $\theta = \pi/2$ si $b > 0$ y $\theta = -\pi/2$ si $b < 0$.

4. Pruebe la identidad $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

5. Pruebe la identidad $z = \mid z \mid e^{i\arg(z)}$ para $z \in \mathbb{C}$.

6. Verifique que $arg(\overline{z}) = -arg(z)$ y que $arg(z.w) = arg(z) + arg(w)$.

...un poco de topología...

Si identificamos al plano complejo con $\mathbb{R}^2$, podemos hacer de esta identificacion un homeomorfismo (por definición) y así munir a $\mathbb{C}$ de una topología. Notar que esta topología no es otra que la topología métrica inducida por $\mid z \mid = \sqrt{a^2+b^2}$, donde $z = a + ib$.

Una curva simple (o curva de Jordan) es una aplicación continua e inyectiva $\alpha : S^1 \to \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}^2$). Equivalentemente, es una aplicación continua $\alpha : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ inyectiva salvo en el par a, b donde debe ser $\alpha(a) = \alpha(b)$. Notar que la imagen de α es siempre un subconjunto compacto y conexo de $\mathbb{C}$.

TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN: Si α es una curva de Jordan, entonces el complento de la imagen de α en $\mathbb{C}$ tiene exactamente dos componentes conexas, una de las cuales es acotada, y la otra es no acotada.

7. Definimos la curva $\alpha : (-\pi/2, 3\pi/2) \to \mathbb{C}$ como $\alpha(t) = (cos(t), sen(2t))$. Es α continua? Es α simple? Su imagen es un conjunto cerrado? Cuantas componentes conexas tiene el complemento de la imagen de α?

8. Definimos compacto mediante la propiedad de Heine-Borel: de todo cubrimiento abierto se puede extraer un subcubrimiento finito. Suponga $K \subset \mathbb{C}$. Pruebe las siguientes equivalencias:

   (a) K es compacto.

   (b) K es cerrado y acotado.

   (c) Todo subconjunto infinito de K tiene un punto de acumulación.

   (d) Toda sucesión $\{z_n\} \subset K$ tiene una subsucesión convergente a un punto $z \in \mathbb{C}$.

9. Pruebe que todo subgrupo multiplicativo compacto de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ es un subgrupo de S^1. Caracterize estos subgrupos.

10. Pruebe que un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ es conexo si y sólo si es arcoconexo.

11. Un conjunto de $\mathbb{C}$ se denomina **región** cuando es abierto conexo y no vacío. Pruebe que todas las componentes conexas de un conjunto abierto son regiones.

12. Pruebe que si a una región se le remueven una cantidad finita de puntos, sigue siendo una región.

.....y algo de cálculo

Recordamos el teorema de Green en el plano: si $F : A \subset I\!R^2 \to I\!R^2$ es C^1 en A, está definida como $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, A es un abierto conexo sin agujeros y el borde de A es diferenciable a trozos, entonces

$$\int_{\partial A} F = \int\int_A (Q_x - P_y)\, dA$$

donde $Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}$ y $P_y = \frac{\partial P}{\partial y}$

13. Refinamiento 1: Si A es un abierto conexo cuyo borde es diferenciable a trozos y esta formado por dos curvas simples una dentro de la otra, entonces vale el teorema de Green (eligiendo la orientación antihoraria para la curva exterior y la horaria para la interior).

    Demostración: ejercicio.

14. Refinamiento 2: Si A es un abierto conexo sin agujeros cuyo borde es diferenciable a trozos y p es un punto interior de A, denotamos con A^* al conjunto pinchado $A - p$. Entonces si $\|X - p\|.F(X) \to 0$ cuando $X \to p$, y $X \in A^*$, vale el teorema de Green para A, i.e.

    $$\int_{\partial A} F = \int\int_A (Q_x - P_y)\, dA$$

    cada vez que F es C^1 en A^*.

    Demostración: Podemos suponer que $p = 0$. Tomemos una bola B_δ centrada en el origen de radio δ ($\delta > 0$). Por el refinamiento previo, se tiene

    $$\int_{\partial A} F - \int_{\partial B_\delta} F = \int\int_{A - B_\delta} (Q_x - P_y)$$

    Tomando límite para $\delta \to 0$, a la derecha se tiene $\int\int_A (Q_x - P_y)\, dA$ (por convergencia dominada, por ejemplo). Pero por otra parte, si $\alpha_\delta(t) = (\delta cost, \delta sent)$, entonces

    $$|\int_{\partial B_\delta} F| \leq \int_0^{2\pi} |< F \circ \alpha_\delta(t), \alpha'_\delta(t) >|\, dt \leq \int_0^{2\pi} \|F \circ \alpha_\delta(t)\|.\delta dt = \int_0^{2\pi} \|F \circ \alpha_\delta(t)\|.\|\alpha_\delta(t)\| dt$$

    Ahora, por la hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar δ lo suficientemente pequeño como para que $\|F \circ \alpha_\delta(t)\|.\|\alpha_\delta(t)\| < \varepsilon/2\pi$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, lo que prueba que este término es arbitrariamente chico para $\delta \to 0$. $\square$

15. Pruebe que todo campo F, C^1 en un dominio conexo A sin agujeros, admite una función potencial $f(x,y)$ cada vez que $Q_x = P_y$. Extienda este resutado a un dominio como en el ejercicio 14.