Análisis Complejo

Práctica 1 - Esfera de Riemann y Homografías

2001 - Primer Cuatrimestre

Considere el plano (x, y) como subconjunto de $\mathbb{R}^3$ vía la aplicación $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$. Identifique cada punto del plano con un punto de la esfera S^2 vía la proyección desde el polo norte, i.e. $\phi : S^2 - \{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^2$ es la aplicación que manda a un punto de la esfera en el punto del plano que "pincha" en el piso la recta que une el susodicho punto de la esfera con el polo norte. Esta aplicación se suele denominar **proyección estereográfica**.

1. Dónde va a parar el polo sur? De una fórmula explícita para ϕ. Verifique que ϕ es una biyección. Verifique que ϕ es una aplicación continua. De una fórmula explícita para $\psi = \phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{(0, 0, 1)\}$. Verifique que ψ es continua.
2. Qué pasa con $\psi(p_n)$ cuando $p_n \to \infty$ en el plano?
3. Cuál es la imagen de un meridiano en S^2 vista en el plano (vía ϕ)? Y la de un paralelo?
4. Si en $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definimos la distancia entre dos puntos como la distancia "cordal" de ambos puntos vistos en la esfera (i.e $\sigma(z, w) = \|\psi(z) - \psi(w)\|$), de una formula explícita para σ.
5. Si $w = \infty$, de una fórmula para $\sigma(z, w)$.
6. Pruebe la identidad
$$\sigma(1/z, 1/w) = \sigma(z, w)$$
para todo $z, w \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.
7. Si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$ es una homografía, verifique que $T^{-1} = \frac{dz-b}{-cz+a}$ es efectivamente una inversa a izquierda y a derecha de T.
8. Como extendería T a $\hat{\mathbb{C}}$, es decir, cuánto vale $T(\infty)$? Si $c \neq 0$, como la extendería a $z = -d/c$?
9. Si T, S son dos homografías, verifique que $T \circ S$ es también una homografía. Si identifica T y S con dos matrices de determinante no nulo, qué matriz puede identificarse con la composición?
10. Si $p \in \mathbb{C}, \mid p \mid < 1$, definimos
$$\tau_p(z) = \frac{p - z}{1 - \overline{p}z}$$
Pruebe que τ_p es un automorfismo de $B = B(0, 1)$, la bola unitaria (abierta), que intercambia p y 0.
11. Pruebe que $\tau_p(\partial B) = \partial B$.
12. Considere la aplicación $I : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ dada por $I(z) = 1/z$ ($I(0) = \infty, I(\infty) = 0$). Qué aplicación es $\phi^{-1} \circ I \circ \phi$, cuando ϕ es la proyección estereográfica? (En otras palabras, cómo actúa I sobre S^2?).
13. Si I es la aplicación del ejercicio anterior, pruebe
   (a) Si R es una recta por el origen, $I(R)$ es una recta que pasa por el origen.
   (b) Si R es una recta que no pasa por el origen, $I(R)$ es un círculo que pasa por el origen.
   (c) Si C es un círculo que no toca el origen, $I(C)$ es un círculo que no toca el origen.

(d) Si C es un círculo por el origen, $I(C)$ es una recta que no pasa por el origen.

14. Muestre que toda homografía se puede descomponer como una composición de las siguientes tres operaciones

    (a) *traslación*: $z \mapsto z + a$, $a \in \mathbb{C}$

    (b) *dilatación*: $z \mapsto bz$, $b \in \mathbb{C}^*$

    (c) *inversión*: $z \mapsto 1/z$

15. Pruebe que las homografías preservan la familia de los círculos y las rectas.

16. Muestre que toda homografía está unívocamente determinada por la imagen de tres puntos **distintos** de $\hat{\mathbb{C}}$.

17. Escriba la fórmula de una homografía que mande $0, i, -i$ en 1,-1,0.

18. Cuántos puntos fijos tiene una homografía? Cuándo tiene la cantidad máxima, y que pasa cuando tiene menos?

19. Cómo es una homografía que fija al 0, al 1 y al ∞? Y una que fija 3 ó más puntos cualquiera (distintos)?

20. Escriba la fórmula de una homografía que manda los puntos (distintos) $z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ en $0, 1, \infty$. Considere por separados los casos en que alguno de estos puntos sea ∞. Es única?

21. Se suele definir la **razón doble** de los puntos z_1, z_2, z_3, z_4 como la imagen de z_1 vía la homografía del ejercicio anterior. Se suele denotar (z_1, z_2, z_3, z_4). Pruebe que $\overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)} = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}, \overline{z_4})$. Pruebe que para toda homografía S, se tiene $(S(z_1), S(z_2), S(z_3), S(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

22. Si S es una homografía cualquiera, $z_2 = S^{-1}(0)$,$z_3 = S^{-1}(1)$ y $z_4 = S^{-1}(\infty)$, entonces $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$.

23. Pruebe que dados dos tripletes de puntos distintos $\{z_1, z_2, z_3\}$,$\{w_1, w_2, w_3\}$ en $\hat{\mathbb{C}}$, existe una única homografía T tal que $T(z_i) = (w_i)$.

24. Pruebe que dados tres puntos distintos en $\mathbb{C}$, o están alineados o están contenidos en alguna circunferencia.

25. Pruebe que la razón doble (z_1, z_2, z_3, z_4) es real si y sólo si los cuatro puntos están en una circunferencia o una recta.

26. Pruebe que la aplicación $z \mapsto \overline{z}$ NO es una homografía.

27. Calcule la imagen de la esfera $\mid z - 2i \mid < 4$ vía la homografía $T(z) = \frac{2z+4+i}{iz-3}$.

28. Calcule la imagen de la intersección de las esferas $\mid z - 1 \mid < 2$, $\mid z + 1 \mid < 2$ vía la homografía $T(z) = \frac{-2z+2\sqrt{3}i}{(1+\sqrt{3}i)z+-3+\sqrt{3}i}$.

29. Sean z_1, z_2, z_3 puntos diferentes de un círculo C(o recta). Los puntos z y z^* se dicen **simétricos** respecto del círculo (o recta) C cuando $(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$. Pruebe que esta definición es independiente de la elección de los z_i. De una definición "intrínseca" de z^* en función de z.

30. Haga dibujos de z, z^* en los casos $C = circunferencia$ y $C = recta$.

31. Halle una homografía que transforme la circunferecia $\mid z \mid = 2$ en $\mid z+1 \mid = 1$, que mande -2 a 0 y 0 a i.

32. Si T es una homografía $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, se dice que T está en su forma normal cuando $ad-bc = 1$. Notar que esto siempre es posible. Se define su traza como $\chi(T) = a+d$ (salvo un signo). Suponiendo que T no es la identidad, pruebe la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

    (a) $\chi(T) = \pm 2$

    (b) T tiene exactamente un punto fijo en $\hat{\mathbb{C}}$

    En este caso se dice que T es **parabólico**. Pruebe que todo T parabólico es conjugado (vía una homografía) a una traslación. Si $\chi(T)$ no es real se dice que T es **loxodrómico**. Si es real y su módulo es mayor que 2, se dice que es **hiperbólico**. Si es real y su módulo es menor que 2, se dice que es **elíptico**.

33. Pruebe que la homografía
$$\sigma(z) = \frac{z+1}{1-z}$$
es un homeomorfismo entre B (la bola unitaria abierta) y $\pi = \{w : Re(w) > 0\}$. Calcule su inversa τ. Si
$$S_\alpha = \{w \in \pi : \mid arg(w) \mid < \alpha\pi/2\}$$
$(0 < \alpha < 1)$ es un sector de ángulo $\alpha\pi/2$ en π, haga un dibujo aproximado de $\tau(S_\alpha)$.