Análisis Complejo

Práctica 2 - Continuidad y derivabilidad

2001 - Primer Cuatrimestre

1. Si $\mid z \mid < 1$, pruebe que
$$\lim_{n\to\infty}(1 + z + z^2 + \cdots + z^n) = \frac{1}{1-z}$$

2. Si $\mid z \mid \neq 1$, pruebe que el siguiente límite existe
$$f(z) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{z^n - 1}{z^n + 1}\right)$$
Es posible extender f a la circunferencia $\mid z \mid = 1$ en forma continua? (exceptuando $z = -1$).

3. Calcule para que números $z \in \mathbb{C}$ está definida
$$f(z) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{z^n}{z^n + 1}\right)$$

4. Pruebe que las funciones $Re(z), Im(z), \mid z \mid : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ son continuas.

5. Sea Ω es una región en $\mathbb{C}$. Tomemos $f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$.
Definimos el campo $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donde
$$P(x, y) = u(x + iy)$$
$$Q(x, y) = v(x + iy)$$
Pruebe la equivalencia:
   (a) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
   (b) F es un campo diferenciable en Ω, y la diferencial de F en cada punto de Ω es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal.

6. Pruebe que si Ω es un abierto en $\mathbb{C}$ y f es holomorfa en $\mathbb{C}$, entonces f preserva la orientación del plano.

7. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Pruebe que f preserva los ángulos (en un entorno conveniente de z_0).

8. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ inyectiva, $D = f(\Omega)$. Pruebe que
$$Area(D) = \int_\Omega \mid f'(z) \mid^2 \, dxdy$$

9. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función
$$f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & si \quad x + iy \neq 0 \\ 0 & si \quad x + iy = 0 \end{cases}$$
Verifique la continuidad de f. Verifique que cumple las condiciones de Cauchy-Riemann en cero pero no es derivable en 0.

10. Si Ω es una región en $\mathbb{C}$, sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Pruebe que

    (a) $\lambda f \in \mathcal{H}(\Omega)$

    (b) $f + g \in \mathcal{H}(\Omega)$

    (c) $f - g \in \mathcal{H}(\Omega)$

    (d) $f.g \in \mathcal{H}(\Omega)$

    (e) Si $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces $1/g \in \mathcal{H}(\Omega)$

    (f) Si $g(\Omega) \subset \Omega$, entonces $f \circ g \in \mathcal{H}(\Omega)$.

    Calcule la correspondiente derivada en cada caso.

11. Pruebe que todo polinomio es holomorfo en $\mathbb{C}$.

12. Pruebe que toda homografía es holomorfa en $\mathbb{C}$ menos un punto (que depende de la homografía en cuestión), o bien es holomorfa en $\mathbb{C}$.

13. Es la aplicación $z \mapsto \mid z \mid^2$ holomorfa en alguna región del plano?

14. Analice cuáles de las siguientes funciones son holomorfas, en que dominio, y cuando sea posible calcule su derivada compleja.

    $a)\ f(z) = e^z := e^x(cosy + iseny)$ $\qquad$ $b)\ f(z) = Arg(z) := arctg(y/x)$

    $c)\ f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x+iy}{x^2+y^2} & si \quad x+iy \neq 0 \\ 0 & si \quad x+iy = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $d)\ f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$

15. Sea Ω un abierto que no toca el eje real, y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si Ω' es el conjunto simétrico respecto del eje real de Ω, pruebe que la función

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

    está en $\mathcal{H}(\Omega')$.

16. Se dice que una función de clase C^2 $\;u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es **armónica** sii u cumple la ecuación diferencial $\Delta u = 0$, donde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

    Suponga que $f = u + iv$ es holomorfa y C^2. Pruebe que u y v son armónicas.

17. Encuentre condiciones sobre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $p(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ sea una función armónica.

18. **Regla de L'Hospital:** Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Suponga que existe $z_0 \in \Omega$ tal que se tiene $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Pruebe

$$lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

19. Calcule

    $a)\ lim_{z \to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$ $\qquad$ $b)\ lim_{z \to 2i} \frac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}$

    $c)\ lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z-e^{\frac{\pi i}{3}})z}{z^3+1}$ $\qquad$ $d)\ lim_{z \to i} \frac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}$

20. Una función holomorfa en todo el plano se denomina **entera**.

    Con la definición $e^z := e^x(cosy + iseny)$, la exponencial es entera. Pruebe

    (a) e^z es C^∞

    (b) $e^{z+w} = e^z.e^w$

    (c) Para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$.

    (d) $1/e^z = e^{-z}$

    (e) e^z tiene período $2\pi i$.

21. Se definen a partir de la exponencial las siguientes funciones. Ver que son enteras y calcular sus derivadas.

$$a)\ sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad b)\ cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$c)\ sinh(z) = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \quad d)\ cosh(z) = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

22. Compruebe que $cos^2(z) + sen^2(z) = 1$ y que $e^{iz} = cos(z) + isen(z)$

23. Sea $\Omega = \mathbb{C} - \{(-\infty, 0]\}$. Si $Arg(z)$ denota el argumento principal de z, la aplicación

$$Log(z) = log(\mid z \mid) + iArg(z)$$

    donde $Log : \Omega \to \mathbb{C}$ se denomina **rama principal del logaritmo**.

    (a) Pruebe que es continua.

    (b) Calcule $S = Log(\Omega)$.

    (c) Pruebe que Log es una biyección con su imagen.

    (d) Pruebe que $exp \circ Log = id_\Omega$ y que $Log \circ exp = id_S$, donde exp denota la aplicación exponencial.

    (e) Pruebe que $Log \in \mathcal{H}(\Omega)$ (sugerencia: utilice el Teorema de la función inversa en el plano y el ejercicio 5 de esta práctica).

    (f) Calcule su derivada compleja.

24. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ está fijo, pruebe que la aplicación

$$z^\alpha := exp(\alpha Logz)$$

    es holomorfa en el mismo conjunto que la aplicación anterior. Calcule su derivada.