Análisis Complejo

Práctica 3 - Integrales de línea

2001 - Primer Cuatrimestre

1. Si $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ está dada por $\alpha(t) = e^{it}$, calcule
   (a) $\int_\alpha z^k \, dz \quad k \in \mathbb{Z}$
   (b) $\int_\alpha Re(z) \, dz$
   (c) $\int_\alpha \overline{z}^k \, dz \quad k \in \mathbb{Z}$
2. Si $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{C}$ es $\alpha(t) = tb + (1-t)a$, con $a, b \in \mathbb{C}$, calcule para $n \geq 0$, $\int_\alpha z^n \, dz$.
3. Si se define $\alpha_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ como $\alpha(t) = e^{ikt}$, con $k \in \mathbb{Z}$, calcule $\int_{\alpha_k} \frac{dz}{z}$. Interprete geométricamente.
4. Sea $\alpha : [0, \pi/2] \to \mathbb{C}$ dada por $\alpha(t) = re^{it}$ $(r > 0)$. Calcule
$$\lim_{r \to \infty} \int_\alpha \frac{e^{iz}}{z} dz$$
5. Calcule
$$\int_\alpha \frac{dz}{z^2 - 1}$$
   siendo: $a)$ $\alpha(t) = 1 + e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$, $b)$ $\alpha(t) = 2e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$.
6. Calcule $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$.
7. Sea Ω abierto conexo en $\mathbb{C}$. Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una curva C^1 a trozos y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pruebe
$$\int_\alpha f'(z) dz = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$
   Deduzca que si α es una curva cerrada, $\int_\alpha f'(z) dz = 0$
   Qué puede deducir del hecho de que $\int_{|z|=r} \frac{dz}{z} \neq 0$ para todo $r > 0$?
8. Si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, y α es una curva que une a con b en el plano complejo $(a, b \in \Omega)$, pruebe la fórmula de integración por partes:
$$\int_\alpha f(z) g'(z) dz = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_\alpha f'(z) g(z) dz$$
9. Sea f holomorfa en $\mathbb{C}$, $\alpha : I \to \mathbb{C}$. Si definimos $\alpha^*(t) = \overline{\alpha(t)}$, y $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$, pruebe
$$\overline{\int_\alpha f(z) dz} = \int_{\alpha^*} f^*(z) dz$$
10. Si $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ es $\alpha(t) = e^{it}$, pruebe la fórmula
$$\overline{\int_\alpha f(z) dz} = -\int_\alpha \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}$$

11. Si Ω es un abierto de borde suave, pruebe las fórmulas

$$Area(\Omega) = \int_{\partial\Omega} x\ dy = -\int_{\partial\Omega} y\ dx$$

Sugerencia: use la fórmula de Green.

Calcule el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

12. Pruebe la fórmula

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2cos^2(t) + b^2sen^2(t)} = 2\pi/ab$$

Sugerencia: parametrice la elipse y calcule $\int_E \frac{dz}{z}$ de dos maneras distintas.

13. Si Ω es un abierto de frontera suave en $\mathbb{C}$, pruebe la fórmula:

$$Area(\Omega) = \frac{-i}{2}\int_{\partial\Omega} \overline{z}\ dz$$

14. Sea $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\alpha(t) = a + re^{it}$. Pruebe que $\int_\alpha \frac{dz}{z-b} = 2\pi i$ para todo $b \in B(a, r)$.

Sugerencia: utilice el teorema de Cauchy-Goursat.

15. Pruebe que si $d(a, b) > r$, y α es la curva del ejercicio anterior, entonces $\int_\alpha \frac{dz}{z-b} = 0$.

16. Sea $\alpha : I \to \mathbb{C}$ una curva cerrada diferenciable a trozos. Si $\eta(\alpha, a)$ denota el índice de la curva α respecto del punto a, pruebe que

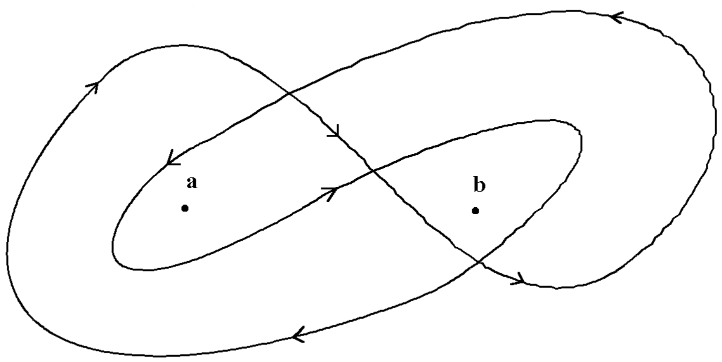
    (a) $\eta(\alpha, a) = -\eta(-\alpha, a)$, donde $-\alpha(t) = \alpha(-t)$ (definida en un intervalo conveniente).

    (b) $\eta(\alpha, a) = 0$ para todo $a \notin \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid\leq \max \mid \alpha \mid\}$

    (c) $\eta(\alpha, a)$ es constante como función de a en cada componente conexa de $\mathbb{C} - Im(\alpha)$.

17. Dado $\Omega \in \mathbb{C}$ abierto, $\alpha : I \to \Omega$, se dice que α es **homóloga a cero** si $\eta(\alpha, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} - \Omega$. Si $\Omega = \mathbb{C} - \{a, b\}$, con $a \neq b$ y α es la curva de la figura, pruebe que α es homóloga a cero en Ω.

Si suponemos que en a y en b hay dos estacas infinitas, y que la curva α es un hilo irrompible, es posible reducir esta curva a un punto?



18. Sea $a \in \Omega$ abierto conexo. Pruebe que si $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{a\})$ y es f es continua en Ω, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

    Sugerencia: utilice el teorema de Morera.

19. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y α es una curva cerrada diferenciable a trozos, pruebe la identidad

$$\eta(\alpha, a).f^{(j)}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f^{(j)}(z)}{z-a} dz$$

    Sugerencia: considere la aplicación $g(z) = \frac{f^{(j)}(z) - f^{(j)}(a)}{z-a}$, el ejercicio previo y el teorema de Cauchy-Goursat.

20. Pruebe la siguiente generalización de la fórmula de Cauchy

$$\eta(\alpha, a) f^{(j)}(a) = \frac{j!}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f(z)}{(z-a)^{j+1}} dz \quad (j \geq 0)$$

    Sugerencia: utilice el ejercicio previo, y luego pruebe la fórmula por inducción, derivando la función auxiliar $F(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^{j+1}}$.

21. Mediante la fórmula de Cauchy, calcule las siguientes integrales:

    (a) $\int_{|z+i|=3} \frac{sin(z)}{z+i} dz$

    (b) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz$

    (c) $\int_{|z|=4} \frac{cos(z)}{z^2-\pi^2} dz$

    (d) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^n(z-3)} \quad n \in I\!N$

    (e) $\int_{|z|=1} \frac{e^{iz}}{z^2} dz$

    (f) $\int_{|z|=1} \frac{sin(z)}{z^3}$

    (g) $\int_{|z-1|=1/2} \frac{log(z)}{z^n} dz \quad n \geq 0$

    (h) $\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz \quad n \in I\!N$

    (i) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-1/2)^n} dz \quad n \in I\!N$

22. Si $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ está dada por $\alpha(t) = re^{it} \quad (r > 0)$, calcule

$$\int_\alpha \frac{z^2+1}{z(z^2+4)} dz$$

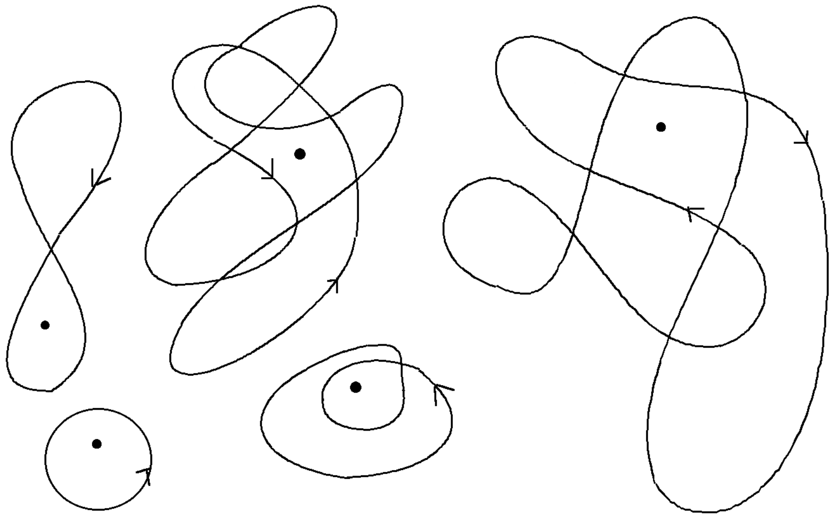
    para todos los valores de $r \neq 2$.

23. Si α es un número complejo, $|\ \alpha\ | \neq 1$, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\alpha cos(t) + \alpha^2}$$

    Sugerencia: Integre $(z-\alpha)^{-1}(z-1/\alpha)^{-1}$ en el círculo unidad.

24. Calcule $\int_\alpha \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz$ siendo α alguna de las siguientes curvas (los puntos negros denotan el cero del plano en cada caso):



25. Considere la curva $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\alpha(t) = (1 - 1/n)re^{it}$. Muestre que si g es una función continua en $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r_0 <\mid z \mid\leq r\}$, entonces

$$\int_{|z|=r} g(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha g(z)dz$$

26. Pruebe que si f es continua en el disco cerrado $\mid z \mid\leq r$ y holomorfa en el disco abierto $\mid z \mid< r$, entonces

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

para todo $\mid w \mid< r$.