Análisis Complejo

Práctica 4 - Aplicaciones holomorfas

2001 - Primer Cuatrimestre

1. Si Ω es un abierto conexo simplemento conexo en $\mathbb{R}^2$ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función armónica, pruebe:

   (a) Existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $u = Ref$

   (b) Vale la fórmula del promedio para u, es decir
   $$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + r\cos t, y + r\sin t)dt$$
   para todo $0 \leq r < d\left((x, y), \partial\Omega\right)$.

2. Si f es holomorfa en un entorno de $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) \geq 0\}$, y $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, entonces vale la fórmula
$$2\pi i f(z) = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \frac{f(t)}{t - z}dt, \quad z \in \Omega$$

3. Si Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, y f es holomorfa en un entorno de $\overline{\Omega}$, entonces para todo $E \subset \Omega$ acotado de frontera α se tiene
$$\mid f^{(n)}(z_0) \mid \leq \frac{n!L(\alpha).max\{\mid f(z) \mid : z \in \alpha\}}{2\pi.d(z_0, \alpha)^{n+1}} \qquad z_0 \in E$$
donde $d(z_0, \alpha)$ denota la distancia usual en el plano de z_0 al borde de E, y $L(\alpha)$ es la longitud de arco de α.

4. **El principio débil del máximo**: Pruebe que si Ω es acotado, y f es holomorfa en un entorno de $\overline{\Omega}$, entonces $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$.

   Suegerencia: utilice el ejercicio anterior (con $n = 0$) aplicado a las funciones holomorfas $f_k(z) = f(z)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

5. Sea L una recta en el plano. Pruebe que si f es holomorfa en $\Omega - L$ y continua en L, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sugerencia: utilice el teorema de Morera.

6. **El principio de reflexión de Schwarz**: Sea f una función holomorfa en el semidisco $D = \{z \in \mathbb{C} : \mid z \mid < r, Im(z) > 0\}$ y continua en $\overline{D}$. Pruebe que si f toma valores reales sobre el eje real, entonces existe una extensión de f holomorfa en $B(0, r)$.

7. Sea Ω abierto conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pruebe que bajo cualquiera de las siguientes condiciones, f es constante:

   (a) $f'(z) \equiv 0$

   (b) $Ref(z)$ es constante

   (c) $Imf(z)$ es constante

   (d) $\mid f(z) \mid$ es constante

   (e) $Argf(z)$ es constante

   (f) $Imf(z) = Re(z)^2$

(g) $f(\Omega) \subset S$, donde S es una curva de nivel suave en el plano, es decir, existe $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $\nabla\phi \neq 0$ sobre S y $S = \{(x,y) : \phi(x,y) = 0\}$

8. Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfa. Pruebe que $\mid f'(0) \mid \leq 1$.

   Sugerencia: utilice la fórmula de Cauchy.

9. Si Ω es un abierto conexo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es tal que existe $a \in \Omega$ de manera que $\mid f(a) \mid \leq \mid f(z) \mid$, entonces $f(a) = 0$ o bien f es constante.

   Sugerencia: utilice el teorema del módulo máximo.

10. Sea Ω abierto conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Tomemos E un abierto conexo. Supongamos que E tiene clausura compacta, y que $\overline{E} \subset \Omega$.

    Pruebe que si $\mid f(z) \mid$ es constante en la frontera de E, entonces f es constante o bien f se anula en algún punto de E.

11. Sea $B = B(0,r)$ $(r > 0)$. Considere $h \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C^0(\overline{B})$. Pruebe

$$\max_{|z| \leq r} \mid h(z) \mid = \max_{|z| = r} \mid h(z) \mid$$

12. Sea Ω abierto conexo tal que $0 \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $B(0,R) \subset \Omega$, se define $M : [0,R) \to \mathbb{R}_+$

$$M(r) = \sup_{|z| \leq r} \mid f(z) \mid$$

    Pruebe que M es una función estrictamente creciente de r, o bien f es constante en Ω.

13. **El lema de Schwarz**: Sea $g : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfa, con $g(0) = 0$. Entonces

$$\mid g(z) \mid \leq \mid z \mid \qquad y \qquad \mid g'(0) \mid \leq 1.$$

    Además, si la primera desigualdad se vuelve una igualdad en cualquier punto de $B(0,1)$ (exceptuando el 0), entonces $g(z) = Cz$ para alguna constante C de módulo 1. La misma afirmación vale si $\mid g'(0) \mid = 1$.

    Sugerencia: considere la aplicación holomorfa definida como $g(z)/z$ (para $z \neq 0$) y $g'(0)$ para $z = 0$; aplique el ejercicio anterior para $0 < r < 1$.

14. Sea Ω abierto conexo y $a \in \Omega$. Si f es holomorfa en $\Omega - \{a\}$, pruebe que una condición necesaria y suficiente para que f se extienda en forma holomorfa a todo Ω es que

$$\lim_{w \to a} (w - a) f(w) = 0$$

15. Sea $\Omega = \mathbb{C} - \{z_1, \cdots, z_n\}$, con $z_i \neq z_j$ si $i \neq j$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Suponga que existe $c > 0$ y $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\mid f(z) \mid < \frac{c}{\prod_{i=1}^{n} \mid z - z_i \mid^{k_i}} \qquad \text{para todo } z \in \Omega.$$

    Pruebe que existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mid \alpha \mid < c$, tal que

$$f(z) = \frac{\alpha}{\prod_{i=1}^{n} (z - z_i)^{k_i}}$$

16. Si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ es una aplicación holomorfa y es a la vez un difeomorfismo (como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$), entonces la aplicación inversa es holomorfa.

17. Si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ es una aplicación holomorfa tal que para algún $z_0 \in \Omega_1$, $f'(z_0) \neq 0$, entonces la inversa local es holomorfa en un entorno de $f(z_0)$.

18. Sea Ω abierto conexo simplemente conexo, $a \in \Omega$. Pruebe la **fórmula de Taylor**:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{(z-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} + f_n(z)(z-a)^n$$

donde f_n es holomorfa en Ω, y vale la fórmula del resto

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)dw}{(w-a)^n(w-z)}$$

donde C es un círculo de radio suficientemente pequeño alrededor de a (y suponemos que z está dentro del mismo).

Sugerencia: las funciones $f_{k+1}(z) = \frac{f_k(z)-f_k(a)}{z-a}$, $f_0(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ son holomorfas en Ω. Encuentre una expresión para $f(z)$ en función de las $f_k(a)$.

19. Sean Ω_1, Ω_2 abiertos en $\mathbb{C}$, y sean $f, h : \Omega_1 \to \mathbb{C}$, $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$. Supongamos que $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$, f es continua y g, h son holomorfas. Si h es inyectiva y además vale $h = g \circ f$ en Ω_1 y $g'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega_2$, pruebe que f es holomorfa, y calcule su derivada en función de las derivadas de g y h.

20. Sea Ω abierto conexo. Una $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua se dice **rama del logaritmo** en Ω si se verifica $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$

    (a) Pruebe que si f y g son dos ramas del logaritmo en Ω, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f - g = 2k\pi i$. Qué pasa si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = g(z_0)$?

    (b) Pruebe que toda rama del logaritmo es holomorfa, y calcule su derivada.

    (c) Pruebe que si S es una semirrecta que comienza en el origen (y lo contiene), entonces es posible definir una rama del logaritmo en $\Omega = \mathbb{C} - S$. Pruebe que este abierto es maximal, o sea que no existe ningún abierto que contenga en forma propia a Ω donde se puede extender esta rama del logaritmo.

21. Sea Ω abierto, $0 \notin \Omega$. Se dice que $g : \Omega \to \mathbb{C}$ continua es una **rama de la raiz cuadrada** (rama de $\sqrt{z}$) en Ω si para todo $z \in \Omega$ se tiene $g(z)^2 = z$.

    (a) Pruebe que toda rama de $\sqrt{z}$ es holomorfa.

    (b) Qué relación hay entre una rama de $\sqrt{z}$ y una rama del logaritmo?

    (c) Si $\Omega = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$, y $\sqrt{z}$ es la rama principal de la raíz cuadrada en Ω, pruebe que la aplicación $z \mapsto cos(\sqrt{z})$ se extiende en forma holomorfa todo $\mathbb{C}$.

22. Sea $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una rama del logaritmo. Si $a \in \mathbb{C}$, definimos $a^z := e^{zg(a)}$.

    (a) Esta aplicación está bien definida?

    (b) Pruebe que es una aplicación holomorfa, y calcule su derivada.

    (c) Calcule i^i considerando la rama principal de logaritmo definida en $\mathbb{C}$ sin los reales negativos. Calcule usando las demas ramas. Haga lo mismo para $(-1)^{3/5}$ y para 1^π.

23. Sean f, g dos funciones continuas distintas tales que $f^2(z) = g^2(z) = 1 - z^2$. Existe algún abierto Ω del plano complejo donde f, g sean holomorfas? De ser así , halle Ω maximal.