Análisis Complejo

Práctica 5 - Series

2001 - Primer Cuatrimestre

1. Halle los términos de orden menor o igual a 3 en las series de potencias:

$a)\ e^z sen(z)$ $\quad b)\ sen(z)cos(z)$ $\quad c)\ \frac{e^z-1}{z}$ $\quad d)\ \frac{e^z-cos(z)}{z}$

$e)\ \frac{1}{cos(z)}$ $\quad f)\ \frac{cos(z)}{sen(z)}$ $\quad g)\ \frac{sen(z)}{cos(z)}$ $\quad h)\ \frac{e^z}{sen(z)}$

2. Pruebe que si $\sum_{n\geq 1} a_n.v_n$ converge, entonces

$$a_0v_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n-1}).v_n \text{converge si y sólo si} \sum_{n\geq 1} a_n.(v_n - v_{n+1})\text{converge}$$

3. **Criterio de Bois-Reymond**: Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge y $\sum_{n\geq 1}(v_n - v_{n+1})$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n.v_n$ converge.

4. Sea $r > 0$. Si el conjunto $\{n \in I\!N : \sqrt[n]{|\ a_n\ |} > r\}$ es infinito entonces el radio de convergencia R de la serie $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ es 0 o bien $R \leq 1/r$.

5. Si $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ y $\sum_{n\geq 0} b_n(z-a)^n$ son dos series de potencias de radio de convergencia $R \geq r > 0$, y definimos
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$
pruebe que la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$ es convergente con radio de convergencia $R' \geq r > 0$, y además
$$\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n . \sum_{n\geq 0} b_n(z-a)^n$$
para todo z donde las tres series son convergentes.

6. Calcular el radio de convergencia de cada una de las siguientes series y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

$a)\ \sum_{n\geq 1} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$ $\quad b)\ \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{1+(1+i)^n}$ $\quad c)\ \sum_{n\geq 1} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} z^n$

$d)\ \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$ $\quad e)\ \sum_{n\geq 1} \frac{z^{n^2}}{2^n}$ $\quad f)\ \sum_{n\geq 1} n! z^{n^2}$

$g)\ \sum_{n\geq 1} a^n z^n\ (a \in \mathbb{C})$ $\quad h)\ \sum_{n\geq 1} a^{n^2} z^n\ (a \in \mathbb{C})$ $\quad i)\ \sum_{n\geq 1} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$

$j)\ \sum_{n\geq 1} z^{n!}$ $\quad k)\ \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$ $\quad l)\ \sum_{n\geq 1} \frac{(z+2)^{n+1}}{(n+1)^3 4^n}$

$m)\ \sum_{n\geq 1} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$ $\quad n)\ \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n(z-i)^n}{4^n(n^2+1)^{5/2}}$ $\quad o)\ \sum_{n\geq 1} sen(n) z^n$

$p)\ \sum_{n\geq 1} \frac{4^n z^n}{5^n}$ $\quad q)\ \sum_{n\geq 1} \frac{e^{nz}}{n^2}$ $\quad r)\ \sum_{n\geq 1} \frac{n^2(z^4+2z^2+1)^n}{7^n}$

7. Muestre que las siguientes series de funciones holomorfas convergen uniformemente:

   (a) $\sum_{n\geq 0} \frac{cos(nz)}{n!} \quad z \in \mathbb{C}$

   (b) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n(z-n)} \quad z \notin \mathbb{N}$

   (c) $\sum_{n\geq 0} e^{-z^2\sqrt{n}} \quad \mid Arg(z) \mid < \frac{\pi}{4}$

8. Sea $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$. Halle el desarrollo en serie de Laurent de f en cada uno de los siguientes anillos:

   $a)\ 0 <\mid z \mid< 1 \quad b)\ 1 <\mid z \mid< 2 \quad c)\ \mid z \mid> 2 \quad d)\ 0 <\mid z-1 \mid< 1$

   $e)\ 1 <\mid z-1 \mid< 2 \quad f)\ \mid z-1 \mid> 2 \quad g)\ 0 <\mid z-1 \mid< 1 \quad h)\ 1 <\mid z-2 \mid< 2$

9. Hallar el coeficiente de z en el desarrollo de Laurent de $\frac{e^z}{z-1}$ en $\mid z \mid> 1$.

10. Verificar que si f tiene una singularidad no evitable en $z = i$ y en $z = 2i$, entonces el desarrollo en serie de Laurent de f en $1 <\mid z \mid< 2$ tiene infinitos términos negativos no nulos e infinitos términos positivos no nulos.

11. Verificar que f tiene un cero de orden k en $z = a$ si y sólo si $g = 1/f$ tiene un polo de orden k en $z = a$.

12. Suponga que f tiene un cero o un polo de orden k en $z = a$ y g tiene un cero o un polo de orden k en $z = a$. Qué clase de singularidad tiene f/g en $z = a$? (considere todos los casos posibles).

13. Cada una de las siguientes funciones tiene una singularidad aislada en $z = 0$. Determine su naturaleza; si es evitable defina $f(0)$ de modo que resulte holomorfa en $z = 0$, si es un polo halle la parte singular.

   $a)\ \frac{sen(z)}{z} \quad b)\ \frac{cos(z)}{z} \quad c)\ \frac{cos(z)-1}{z}$

   $d)\ e^{1/z} \quad e)\ \frac{log(z+1)}{z} \quad f)\ \frac{cos(1/z)}{z}$

   $g)\ \frac{z^2+1}{z(z+1)} \quad h)\ \frac{1}{1-e^z} \quad i)\ zsen(1/z)$

14. Sea $f(z) = \frac{a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0}$. Probar que ∞ es una singularidad evitable o una singularidad aislada. Clasificarla de acuerdo con el grado de los polinomios.

15. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones en $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$. En el caso de ceros o polos determinar el orden.

   $a)\ \frac{e^z-1-z}{z^2} \quad b)\ cos(z)e^{-1/z^2} \quad c)\ \frac{1}{z^3+7z^2+z+5} + ze^{1/z}$

   $d)\ \frac{z^5}{1+z^4} \quad e)\ \left(sen(\frac{1}{z^2})\right)^{-1} \quad f)\ e^{\frac{z}{1-z}}$

   $g)\ \frac{cos(z)-sen(z)}{z^4+2z^2+1} \quad h)\ sen\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^2} \quad i)\ \frac{1}{cos(z)-1}$

16. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ y $n \geq 0$, sea

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{\lambda cos(t)} cos(nt)dt$$

Pruebe que para $0 <\mid z \mid< \infty$, vale

$$a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) = e^{\frac{1}{2}\lambda(z+\frac{1}{z})}$$

17. Sea $B = B(0,1)$, y $f \in \mathcal{H}(B)$. Si $f(z) = u + iv$, pruebe que

$$\int_0^{2\pi} u(re^{it})e^{-int}dt = i\int_0^{2\pi} v(re^{it})e^{-int}dt$$

para todo $n \geq 1$, para cualquier $r \in (0,1)$.

Sugerencia: la función $g(w) = \overline{f(\overline{w})}$ es holomorfa en B, así como $g(w)w^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Utilice Cauchy-Goursat.

18. Sea $B = B(0,1)$, y $f \in \mathcal{H}(B)$. Si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $f = u + iv$, pruebe que para todo $r \in (0,1)$, y todo $n \geq 1$, vale:

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} u(re^{it})e^{-int}dt = \frac{i}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} v(re^{it})e^{-int}dt$$

19. Sea f como en el ejercicio previo. Pruebe que si $u \geq 0$ y $f(0) = 1$, entonces $\mid a_n \mid\leq 2$ para todo $n \geq 1$. Concluya que

$$\mid f(z) \mid\leq \frac{1+\mid z \mid}{1-\mid z \mid}$$

20. Sea f entera.

    (a) Suponga que $f(z + 2\pi i) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que existe g holomorfa en $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $f(z) = g(e^z)$.

    (b) Suponga ahora que $f(z + 1) \equiv f(z)$. Pruebe que existe $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ tal que tal que $f(z) = g(e^{2\pi iz})$. Concluya que

    $$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{2\pi ikz}$$

    con convergencia absoluta en $\mathbb{C}$, y que la serie converge uniformemente en cualquier franja $a < Im(z) < b$.

    Pruebe que los coeficientes se pueden obtener mediante la fórmula

    $$a_k = \int_0^1 f(x + ib)e^{-2\pi ik(x+ib)}dx$$

    donde $b \in \mathbb{R}$ es cualquiera.

21. Generalize el ejercicio anterior al caso en el que f es holomorfa en una banda horizontal $b_1 < Im(z) < b_2$, y muestre que si $f(z) = cotg(\pi z)$, entonces

$$f(z) = -i\left(1 + 2\sum_{k\geq 1} e^{2\pi ikz}\right)$$