Análisis Complejo

Práctica 6 - Funciones analíticas y Residuos

2001 - Primer Cuatrimestre

1. Si $B = B(0,1)$, existe $f \in \mathcal{H}(B)$ tal que $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ para todo $n \geq 1$?

2. Existe f holomorfa en algún entorno de cero tal que $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$? Y pidiendo $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{-1}{n}) = \frac{1}{n}$?

3. Lo mismo que el ejercicio anterior pero para $\mid f(\frac{1}{n}) \mid < \frac{1}{2^n}$. Y para $\frac{1}{\sqrt{n}} < \mid f(\frac{1}{n}) \mid < \frac{2}{\sqrt{n}}$?

4. Sea $f(z) = \cos\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, $\mid z \mid < 1$. Verifique que f es holomorfa, y calcule el conjunto de ceros de f. Note que el conjunto de ceros tiene un punto de acumulación. Contradice esto algún resultado conocido?

5. Sea Ω abierto conexo simplemente conexo y $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Suponga que f y g nunca se anulan en Ω. Suponga por otra parte que existe una sucesión de infinitos puntos distintos $a_n \in \Omega$ tales que $a_n \to a \in \Omega$, de manera que
$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$
Pruebe que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = c.g(z)$ en Ω.

6. Si f y $\overline{f}$ son holomorfas en Ω (abierto conexo), entonces f es constante.

7. Sea Ω abierto conexo. Si f y g son holomorfas en Ω y $\overline{f}.g$ es holomorfa en Ω, entonces $g \equiv 0$ o bien f es constante.

8. Halle todas las funciones enteras tales que $lim_{|z|\to\infty} \mid f(z) \mid = 5$.

9. Sea f entera y R un número real positivo tal que $\mid f(z) \mid \leq M \mid z \mid^n$ para todo $\mid z \mid > R$. Probar que f es un polinomio de grado a lo sumo n.

10. Sea f entera.
    (a) Pruebe que f es constante si y sólo si existe el límite en infinito.
    (b) Pruebe que ∞ es un polo de f si y sólo si f es un polinomio de grado mayor o igual a uno.
    (c) Concluya que ∞ es una singularidad esencial para toda f entera que no sea un polinomio.

11. Pruebe que una función entera tiene una singularidad evitable en ∞ si y sólo si es constante.

12. Pruebe que una función entera tiene un polo de orden n en ∞ si y sólo si es un polinomio de grado n

13. Halle todas las funciones enteras y biyectivas. O sea, encuentre todos los automorfismos del plano complejo.

14. Sea $f : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ holomorfa e inyectiva.
    Pruebe que existe $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, tal que $f(z) = az$ o bien $f(z) = a/z$.
    Sugerencia: qué tipo de singularidad tienen f, $1/f$, en 0 y en ∞?

15. Sea $n \geq 0$, y f una función entera tal que para alguna constante $M > 0$,

$$| f(z) | \leq M(1+ | z |)^n$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que f es un polinomio de grado a lo sumo n.

16. Sea f entera tal que existen números complejos z_0, z_1 ($\mathbb{R}$-linealmente independientes) tales que $f(z+z_0) = f(z)$ y $f(z+z_1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que f es constante.

17. Sea Ω abierto conexo, y $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Suponga que $f.g \equiv 0$ en Ω. Pruebe que $f \equiv 0$ o bien $g \equiv 0$.

18. Sea $B = B(0,1)$, y sea $f \in \mathcal{H}(B)$ tal que $B \subset f(B)$.

    Si $f(0) = 0$, f es inyectiva, y $| f'(0) | \leq 1$, pruebe que $f(z) = Cz$ para alguna constante C de módulo uno.

    Sugerencia: use el lema de Schwarz.

19. Sea Ω abierto conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Suponga que $f \circ f = f$. Muestre que f es constante o bien que $f = id_\Omega$.

20. Sean f y g funciones enteras. Se define

$$h(z) = g\left(| f(z) |^2 - | f(z) - 1 |^2\right), \quad z \in \mathbb{C}$$

Pruebe que si h es constante, entonces f es constante o bien g es constante.

21. Sean Ω abierto y $r > 0$, $\overline{B(0,r)} \subset \Omega$. Suponga que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ con radio de convergencia $R \in (r, +\infty]$. Pruebe la fórmula

$$\sum_{n \geq 0} | a_n |^2 \, r^{2n} = \int_{-\pi}^{\pi} | f(re^{i\theta}) |^2 \, \frac{d\theta}{2\pi}$$

22. Bajo las mismas hipótesis del ejercicio anterior, pruebe la fórmula

$$\int\int_{B(0,r)} | f(x+iy) |^2 \, \frac{dx\ dy}{\pi r^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{| a_n |^2 \, r^{2n}}{n+1}$$

23. Suponga que f es entera, y que

$$\int\int_{\mathbb{C}} | f(x+iy) |^2 \, dxdy < \infty$$

Pruebe que $f \equiv 0$.

24. Sea $B = B(0,1)$, $f \in \mathcal{H}(B)$, f inyectiva, $f(B) = D$. Si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, pruebe

$$Area(D) = \pi \sum_{n \geq 1} | a_n |^2$$

25. Si $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ con p, q holomorfas en un entorno de $a \in \mathbb{C}$, $p(a) \neq 0$ y además a es un cero simple de q, entonces a es un polo simple de f y vale

$$Res(f, a) = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

26. Sea $f(z) = \frac{1}{(z^{+}1)(z-1)^3}$. Calcule $Res(f,i)$, $Res(f,-i)$, $Res(f,1)$.

27. Si f tiene un polo simple en a y g es holomorfa en a, probar que $Res(f.g,a) = Res(f,a).g(a)$.

28. Calcular los residuos de f en cada una de sus singularidades aisladas y en ∞:

$$a)\ \frac{1}{z^2(z+1)} \qquad b)\ \frac{1}{z^3}sen(z) \qquad c)\ \frac{e^z}{(z-1)^2 z}$$

$$d)\ z^5 cos(\tfrac{1}{z}) \qquad e)\ \frac{e^{1/z}}{1+z} \qquad f)\ \frac{e^{1/z}}{(1+z)z}$$

29. Si a es un polo simple de f, y α_r es un arco de círculo centrado en a de apertura θ (orientado positivamente), entonces

$$Res(f,a) = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{i\theta}\int_{\alpha_r} f(z)dz$$

30. Sea $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$ $(a \in \mathbb{C})$. Calcule $Res(f,\pi i)$.

31. Sea $f(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$. Calcule $Res(f,\infty)$.

32. Sea C la circunferencia $\mid z \mid= 2$ recorrida en sentido positivo. Calcule

$$a)\ \int_C \frac{z\ dz}{z^4+1} \qquad b)\ \int_C \frac{1+sen(z)}{sen(z)}dz \qquad c)\ \int_C \frac{dz}{(z+1)^4(z^2-9)(z-4)}$$

33. Sea Ω abierto conexo tal que $\overline{B(0,1)} \subset \Omega$, y considere $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pruebe que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z-a}dz = \begin{cases} \overline{f(0)} & si \ \mid a \mid < 1 \\ \overline{f(0)} - \overline{f(1/\overline{a})} & si \ \mid a \mid > 1 \end{cases}$$

34. Tomemos f holomorfa en un entorno de $B(0,1)$. Pruebe que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{\overline{f(w)}\ w}{w-a}dw = \begin{cases} \overline{f'(0)} + a\overline{f(0)} & si \ \mid a \mid < 1 \\ \overline{f'(0)} + a\overline{f(0)} - a\overline{f(1/\overline{a})} & si \ \mid a \mid > 1 \end{cases}$$

35. Sea $B = B(a,r)$, $f \in \mathcal{H}(B) \cap C^0(\overline{B})$. Suponga que f es inyectiva en B. Si $G = f(B)$, entonces f^{-1} es holomorfa en G y para todo $w \in G$ se tiene:

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz$$

36. Considere $f(z) = z^5 + 15z + 1$. Pruebe que f tiene una única raíz en $\mid z \mid< 3/2$. Hay alguna raíz en $\mid z \mid\geq 2$?

37. Pruebe que la función $f(z) = 2z^5 + 7z - 1$ tiene una raíz real positiva en $\mid z \mid< 1$ y que el resto de las raíces está en $1 <\mid z \mid< 2$.

38. Pruebe que la ecuación $z^n e^{r-z} = 1$ $(r > 1)$ tiene exactamente n raíces en $\mid z \mid< 1$.

39. Sea $n \geq 1$. Muestre que la ecuación $z^{n+3} + e^z = 0$ tiene $n+3$ ceros contados con multiplicidad en $B(0,e)$.

40. Sea $B = B(0,3)$, $f \in \mathcal{H}(B) \cap C^0(\overline{B})$. Suponga que $f \neq 0$ en ∂B. Si C es un círculo de radio 3 centrado en cero (con orientación positiva), y

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 4\pi i \qquad \int_C z\frac{f'(z)}{f(z)} dz = 4\pi i \qquad \int_C z^2\frac{f'(z)}{f(z)} dz = -8\pi i,$$

encuentre los ceros de f en B.

41. Sea f holomorfa en un entorno de $\overline{B(0,1)}$. Pruebe que si $\mid f(z) \mid < 1$ para $\mid z \mid = 1$, entonces f tiene un único punto fijo en $B(0,1)$.

    Si $\mid f(z) \mid \leq 1$ para $\mid z \mid = 1$, qué puede decir?

42. Pruebe que la ecuación

$$\frac{e^{-1/z}}{2z^2+1} + \frac{1}{10z} = 0$$

tiene exactamente una solución en $\mid z \mid > 1$.

43. Demuestre la **forma fuerte del Teorema de Rouché**: Sea Ω abierto conexo en $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$, y α una curva de Jordan en Ω cuyo interior está contenido en Ω. Si f, g son dos funciones meromorfas en Ω sin polos sobre α tales que

$$\mid f(z) - g(z) \mid < \mid f(z) \mid + \mid g(z) \mid \qquad (z \in \alpha)$$

entonces el índice de $f \circ \alpha$ es igual al índice de $g \circ \alpha$. En consecuencia la cantidad de ceros menos polos de f coincide con la cantidad de ceros menos polos de g en el interior de α.

    Sugerencia: pruebe que existe un logaritmo de $F(z) = f(z)/g(z)$ definido en un entorno de la imagen de α.

44. **El Teorema de Rouché según G. Pólya**: Un hombre lleva un ramo de flores en una mano y la correa de su perro en la otra. Mientras espera a su novia, se pasea nervioso alrededor de una fuente redonda, cuyo diámetro es de dos metros. A lo largo del paseo, el perro deambula alrededor de la fuente sin otra limitación que el largo de su correa, que es de 1 metro y medio. Después de 20 minutos de espera, el hombre y su perro se encuentran ambos en sus respectivos puntos de partida.

    Muestre que el número total de vueltas alrededor de la fuente es el mismo para el perro y su dueño.