Análisis Complejo

Práctica 7 - Integrales reales

2001 - Primer Cuatrimestre

1. Calcule, expresando como una función racional de coseno y seno, las integrales

$$a)\ \int_0^{2\pi} \frac{cos(t)dt}{5+3cos(t)} \qquad b)\ \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+sen^2(x)}\ \ (a>0)$$

2. Calcule, mediante los residuos en el semiplano $\{Im(z)>0\}$, las integrales de las siguientes funciones racionales.

   (a) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$

   (b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2-x+2}{x^4+10x+9}dx$

   (c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^m}{1+x^{2n}}dx$, con n, m naturales, $0 \le m \le 2n-2$.

   Para el último ítem considere por separado el caso m par y m impar.

3. Calcule las integrales

$$a)\ \int_0^\infty \frac{x^3 sen(bx)}{x^4+a^4}dx,\ a,b>0 \quad b)\ \int_0^\infty \frac{cos(x)dx}{x^2+a^2},\ a\in I\!R \quad c)\ \int_0^\infty \frac{sen^2(kx)}{x^2}dx,\ k>0$$

4. Calcule, con p, q enteros,

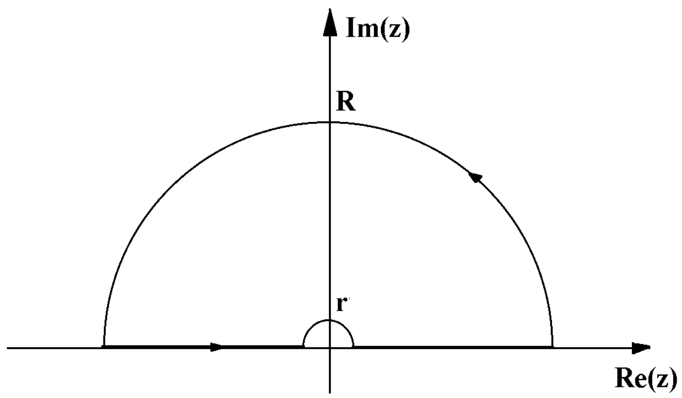
$$\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}dx \qquad 0\le p\le q-2$$

   usando la función auxiliar $R(z)log(z)$.

5. Calcule

$$\int_0^\infty \frac{ln(x)}{(1+x^2)^2}dx$$

6. Calcule $\int_0^\infty \frac{ln(x)}{x^2+a^2}$, $a>0$, integrando en la curva



7. La integral de Gauss generalizada:

   (a) Suponga que $Re(z) > 0$. Pruebe la buena definición y la continuidad de

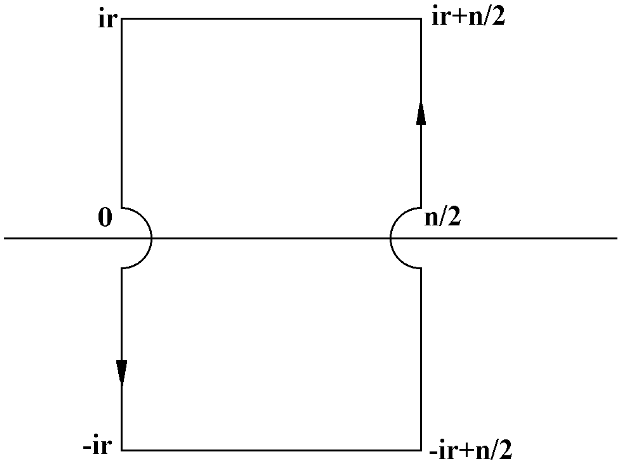
   $$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt^2} dt$$

   (b) Pruebe que $F(z)^2 = \pi/z$. Eligiendo rama de la raiz cuadrada definida en $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$, concluya que $F(z) = \sqrt{\frac{\pi}{z}}$.

   (c) Suponga ahora que $Re(z) = 0$, $z \neq 0$. Pruebe que la integral que define F converge al valor dado por el item previo.

   Sugerencia: para $z = yi$ $(y > 0)$, llame $a = \sqrt{y/2}$ y considere el triángulo de vértices en 0, $r.a$, $r.a.(1+i)$. Integre $g(z) = e^{-z^2}$ en este triángulo y haga tender r a infinito.

8. Calcule las sumas de Gauss $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k^2/n} = \sqrt{n}\,\frac{i+i^{1-n}}{i+1}$, integrando $\int_\alpha \frac{e^{2\pi i z^2/n}}{e^{2\pi i z}-1} dz$, donde α es la curva



9. Pruebe que la función $\pi cotg(\pi z)$ es meromorfa en todo el plano, con polos simples en $z = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y que el residuo en cada polo es 1 para todo n.

   Sea $f = p/q$ una función racional, con grado de $q \geq gr(p) + 2$. Sean $a_1, \cdots, a_m$ sus polos con $b_1, \cdots, b_m$ sus correspondientes residuos. Suponga que ninguno de los polos es un número entero. Pruebe la fórmula

   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f(k) = -\pi \sum_{j=1}^{m} b_j cotg(\pi a_j)$$

   Sugerencia: Calcule primero la integral $I_n = \int_{\alpha_n} f(z)\pi cotg(\pi z) dz$, donde I_n es el rectángulo de vértices $\pm(n+1/2) \pm (n+1/2)i$. Luego pruebe que $I_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

10. Calcule, usando el ejercicio anterior

    (a) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(a+n)^2}$, $a \notin \mathbb{Z}$. Sugerencia: $f(z) = 1/(z+a)^2$.

    (b) $\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2-n^2}$, $a \notin \mathbb{Z}$. Sugerencia: $f(z) = 1/(z^2 - a^2)$.

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2+n^2}$, $a \notin \mathbb{Z}$. Sugerencia: $f(z) = 1/(z^2 + a^2)$.

    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, $k = 1, 2, ...$