Análisis Complejo

Práctica 8 - Series y productos

2001 - Primer Cuatrimestre

Para toda la práctica, $B = B(0,1)$, y Ω denota un abierto conexo de $\mathbb{C}$.

1. (Teorema de Cauchy de expansión en fracciones parciales): Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$, con polos en $\{a_k\}_{k\geq 1}$. Tomemos γ_n una familia de curvas de Jordan C^1 a trozos, $\gamma_n \subset Int(\gamma_{n+1})$, $\mathbb{C} = \cup_{n\in\mathbb{N}} Int(\gamma_n)$. Suponga que γ_n no corta ningún polo de f, para ningún n. Suponga que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0$$

uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$. Pruebe que $f(z) = \sum_{n\geq 1} \sum_{a_k \in D_n} P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$, con convergencia uniforme sobre compactos que no contengan polos de f.

($D_n = Int(\gamma_n) - \overline{Int(\gamma_{n-1})}$ y P_k es la parte principal de f en a_k).

2. Utilizando el ejercicio anterior, calcule las expansiones de

   (a) $f(z) = \pi cotg(\pi z)$

   (b) $f(z) = \frac{\pi^2}{sen^2(\pi z)}$

   (c) $f(z) = \frac{\pi}{sen(\pi z)}$

   (d) $f(z) = \pi tg(\pi z)$

3. Pruebe la expresión

$$\frac{\pi}{cos(\pi z)} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-1/2)^2 - z^2}$$

Sugerencia: pruebe primero que la serie es convergente, y luego que a ambos lados de la igualdad se tiene una función acotada (fuera de los polos). Luego pruebe que la diferencia no tiene polos (es una función entera).

4. Con un razonamiento similar al del ejercicio anterior, pruebe que para $a \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\frac{\pi i sinh(2\pi a)}{sin[\pi(z-ai)]sin[\pi(z+ai)]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z+k-ai} - \frac{1}{z+k+ai}$$

Concluya que

$$\frac{\pi}{a}\frac{sinh(2\pi a)}{cosh(2\pi a) - cos(2\pi z)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+k)^2+a^2}$$

5. Integrando la expresión para $cotg(z)$ pruebe que

$$sen(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \qquad \text{y que} \qquad \sinh(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right)$$

6. Con un procedimiento similar al del ejercicio anterior, pruebe que

$$cos(\pi z) = \prod_{n=0}^{\infty}\left[1 - \left(\frac{z}{n+1/2}\right)^2\right]$$

7. Encuentre el género y la expansión de Weierstrass correspondiente a las siguientes sucesiones

   (a) $z_k = k, \quad k \in \mathbb{Z}$

   (b) $z_n = log(n), \quad n \geq 2$

   (c) $z_n = (n\ log^2 n)^{1/r}$, $n \geq 2$

   (d) $m + in, \quad m, n \in \mathbb{Z}$ (ordene los ceros por módulo creciente)

   (e) $z_n = e^n, \quad n \geq 1$

   (f) $z_n = n^a, \quad n \geq 1, a > 0$

8. Cuál es el género de $f(z) = sen(z^2)$?

9. Pruebe las siguientes fórmulas:

   (a) $\frac{sen(\lambda - z)}{sen(\lambda)} = e^{-zcotg(\lambda)} \prod_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{\lambda + n\pi}\right) e^{z/(\lambda + n\pi)}, \quad \lambda \notin \pi\mathbb{Z}$

   (b) $cosh(z) - cos(z) = z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{4n^4\pi^4}\right)$

   (c) $e^z - 1 = ze^{z/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right)$

   (d) $e^{z^2} + e^{2z-1} = 2e^{(z^2+2z-1)/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(z-1)^4}{\pi^2(2n-1)^2}\right)$

   Sugerencia: para el último ítem considere $g(w) = e^w + 1$. Desarrolle g y luego halle la relación entre esta función y la pedida, tomando $w = (z-1)^2$.

10. A partir de la definición como producto de la función Gamma, pruebe

    (a) $\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}$

    (b) $\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z+1/2)}{\Gamma(z+1/2)}\right) = 2\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right)$

    (c) $\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = e^{az+b}\Gamma(2z)$ (sug: integre)

    (d) $\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$

    La última relación es conocida como **la fórmula de duplicación de Legendre.** Para hallar a y b sustituya en $z = 1, 1/2$.

11. La función Γ tiene polos simples en $z = -n$, $n \geq 0$, y además $z.\Gamma(z) \to 1$ cuando $z \to 0$ (mire la definición).

    (a) Sabiendo que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, pruebe que

    $$(z+n)\Gamma(z) \xrightarrow[z \to -n]{} \frac{(-1)^n}{n!} \qquad n \geq 0$$

    (b) Existe f entera tal que

    $$\Gamma(z) = f(z) + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

12. Suponga que f es holomorfa en $B(0, R)$, y que 0 es un cero de orden k de f. Pruebe que para todo $0 < r < R$ se tiene

    $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log \mid f(re^{i\theta}) \mid d\theta = log\left(\frac{1}{k!} \mid f^{(k)}(0) \mid r^k \prod_{1 \leq j \leq N} \frac{r}{\mid a_j \mid}\right)$$

    donde $a_1, \cdots, a_N$ son los ceros de f contados con multiplicidad en $\overline{B(0,r)} - \{0\}$.

    Sugerencia: considere $g(z) = f(z)/z^k$.

13. Suponga que f es meromorfa en $B(0,R)$. Tomemos $0<r<R$. Si el origen no es ni un cero ni un polo de f, y denotamos con $a_1,\cdots,a_n$ y $b_1,\cdots,b_m$ a los ceros y polos de f en $\overline{B(0,r)}$ respectivamente, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log \mid f(re^{i\theta}) \mid d\theta = log\left\{\left|\frac{b_1 ... b_m}{a_1 ... a_n} f(0)\right| r^{m-n}\right\}$$

14. Suponga que f es una función entera. Denotaremos $(0<r<\infty)$

$$M(r)=\max_{|z|\leq r} \mid f(z) \mid = \max_{|z|=r} \mid f(z) \mid = \max_{\theta\in[0,2\pi]} \mid f(re^{i\theta}) \mid$$

Suponga que $f(0)=1$. Si denotamos con $n(r)$ a la cantidad de ceros de f en el disco de radio r, pruebe la desigualdad

$$n(r)\leq lg_2 M(2r)$$

15. Sea f entera, $f(0)\neq 0$, y suponga que para r suficientemente grande,

$$M(r)<exp\left(Ar^k\right)$$

con A,k dados. Pruebe que

$$\mu=\limsup_{r\to+\infty}\frac{log\ n(r)}{log(r)}\leq k$$

donde $n(r)$ es la función contadora del ejercicio anterior. El número μ se denomina **orden de crecimiento** de $n(r)$.

Pruebe que esta cota no puede ser mejorada (considere $f(z)=1-e^{z^k}$).

16. Tomemos f entera, y supongamos que su conjunto de ceros $\{a_n\}\subset\mathbb{C}$ verifica la hipótesis $0\leq\mid a_1 \mid\leq\mid a_2 \mid\leq\cdots\leq\mid a_n \mid\to+\infty$. Suponga que el orden de crecimiento de los ceros de f (el número μ del ejercicio previo) es finito. Pruebe que

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{\mid a_k \mid^s}<+\infty \qquad \text{para todo } s>\mu.$$

En particular si $\mid f(z) \mid < exp(\mid z \mid^\rho)$ para z suficientemente grande, cualquier exponente $\rho+\epsilon$ hace que la suma converja.

Sugerencia: pruebe la identidad $\int\frac{n(t)dt}{t^{s+1}}=\frac{1}{s}\sum\frac{1}{|a_n|^s}$

17. Pruebe que si $s>0$ es tal que $\sum_n\frac{1}{|a_n|^s}<+\infty$, entonces $\mu\leq s$, donde μ es el orden de crecimiento de ceros. Concluya que si llamamos

$$\rho_1=\inf\{s>0:\sum_n\frac{1}{\mid a_n \mid^s}<+\infty\}$$

(donde convenimos que el ínfimo del conjunto vacío es $+\infty$) entonces se tiene $\rho_1=\mu$.

18. Pruebe que

$$b_N(z)=\prod_{n\geq 1}^{N}\left(\frac{1-2^{-n}-z}{1-z(1-2^{-n})}\right)$$

converge uniformemente sobre compactos de B a $b\in\mathcal{H}(B)$, y que $\mid b(z) \mid<1$ para todo $z\in B$. Cual es el conjunto de ceros de b?

19. Mismo ejercicio que el anterior con

$$b_N(z)=\prod_{n\geq 1}^{N}\left(\frac{1-n^{-2}-z}{1-z(1-n^{-2})}\right)$$