Análisis Complejo

Práctica 9 - $\mathcal{H}(\Omega)$ y sus familias normales

2001 - Primer Cuatrimestre

NOTA: $B = B(0,1)$ y Ω es un abierto conexo de $\mathbb{C}$. La convergencia en $\mathcal{H}(\Omega)$ (y también en $C^0(\Omega)$) es siempre la uniforme sobre compactos de Ω. Además $\|f\|_K = \sup_{z\in K} \mid f(z) \mid$.

1. Dado Ω, una sucesión exhaustiva de compactos en Ω es una familia $\{K_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos compactos dentro de Ω tales que $\Omega = \cup_{n\geq 1} K_n$ y además $K_n \subset Int(K_{n+1})$. Pruebe que para todo Ω existe al menos una sucesión exhaustiva de compactos.

2. Dado un abierto Ω y K_n una sucesión exhaustiva de compactos en Ω, denotaremos con $p_n(f) = \sup_{z\in K_n} \mid f(z) \mid$. Nombremos con $C^0(\Omega)$ a la familia de funciones continuas en Ω.

   (a) Pruebe que la fórmula
   $$d(f,g) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(f-g)}{1+p_k(f-g)}$$
   induce una métrica en $C^0(\Omega)$, la cual es invariante por traslaciones. Esto último quiere decir que $d(f+h, g+h) = d(f,g)$ para toda f, g, h.

   (b) Pruebe que una sucesión f_n en $C^0(\Omega)$ converge uniformemente sobre compactos a f si y sólo si $d(f_n, f) \to_{n\to\infty} 0$.

   (c) Recordemos que $C^0(\Omega)$ con la convergencia uniforme sobre compactos es un espacio vectorial métrico completo (espacio de Fréchet). Pruebe que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un espacio vectorial métrico completo.

3. Considere el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathcal{H}(\Omega)$ con la convergencia uniforme sobre compactos. Pruebe que la aplicación $\frac{d}{dz} : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega)$ es lineal y continua.

4. Un conjunto $A \subset \mathcal{H}(\Omega)$ se dice **localmente acotado** si para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $M(K) < \infty$ tal que
   $$sup_{f\in A} \|f\|_K \leq M(K)$$
   Pruebe (teorema de Montel) que los conjuntos precompactos de $\mathcal{H}(\Omega)$ son exactamente los conjuntos acotados.

   A partir de aquí diremos que una sucesión $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ está acotada si el conjunto $\{f_n\} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es localmente acotado.

5. Suponga que Ω está acotado. Considere la familia $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(\Omega) \subset \Omega\}$. Pruebe que $\mathcal{F}$ es precompacta y encuentre su clausura.

6. Sea $B = B(0,1)$, y $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en B.

   Suponga que existe una sucesión $M_n \geq 0$ tal que $\overline{\lim}_n \sqrt[n]{M_n} \leq 1$ de manera que $\mid a_n \mid \leq M_n$ para toda $f \in \mathcal{F}$, donde $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

   Pruebe que $\mathcal{F}$ tiene clausura compacta en $\mathcal{H}(B)$.

7. Considere $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{H}(B)$, $f_n(0) = 0$. Suponga que $Re(f_n)$ converge a cero. Pruebe que f_n converge a la función nula.

   Sugerencia: considere $g_n = e^{f_n}$.

8. Pruebe (teorema de Vitali): Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ una sucesión acotada, y sea $E \subset \Omega$ un conjunto con un punto de acumulación en Ω. Si para todo $z \in E$, $f_n(z)$ converge puntualmente, entonces f_n converge en $\mathcal{H}(\Omega)$.

9. Pruebe que la sucesión de funciones holomorfas $f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ converge a $f(z) = e^z$.

   Qué puede decir de los ceros de f_n y los ceros de f?

10. Considere la sucesión de funciones enteras $f_n(z) = \frac{1}{n} sen(nz), \quad n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $f_n \to 0$ uniformemente sobre $\mathbb{R}$.

    Pruebe que $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ no converge uniformememente en ningún $\Omega \subset \mathbb{C}$.

11. Sea $\{f_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{H}(B)$ una sucesión acotada. Si $f_n(z) = \sum_{k \geq 0} c_{n,k} z^k$, entonces f_n converge a f_0 en $\mathcal{H}(B)$ si y sólo si $c_{n,k} \xrightarrow[n \to \infty]{} c_{0,k}$ para todo $k \geq 0$.

12. Pruebe

    (a) Si f es holomorfa en un entorno de $\overline{B(a,R)}$ $(a \in \mathbb{C}, R > 0)$, entonces

    $$| f(a) |^2 \leq \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R | f(a + re^{i\theta}) |^2 \; r \; dr d\theta$$

    (b) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}, M > 0$ y $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : \int\int_\Omega | f(x+iy) |^2 \; dxdy \leq M\}$. Pruebe que $\mathcal{F}$ es precompacta.

13. Sea $\mathbf{S} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(0) = 0, f'(0) = 1, f$ inyectiva $\}$. Pruebe que $\mathbf{S}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{H}(\Omega)$. Piense si $\mathbf{S}$ es compacto.

14. Sea Ω abierto conexo y acotado en $\mathbb{C}$. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es tal que $f(\Omega) \subset \Omega$, y existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = z_0$ y $| f'(z_0) | < 1$, entonces existe el límite en $\mathcal{H}(\Omega)$ de las iteraciones de f y es igual a z_0.

    En otras palabras, se tiene $\lim_n f^{[n]} = z_0$, donde la convergencia es la uniforme sobre compactos de Ω, y $f^{[n]} = f \circ \cdots \circ f$.

15. Tomemos $f \in \mathcal{H}(B)$, con $f(0) = 0$, y $\|f\|_\infty \leq 1$. Consideremos la familia de iteraciones $\{f^{[n]}\}_{n \geq 1}$, $f^{[n]} = f \circ \cdots \circ f$.

    Muestre que todo punto de acumulación de esta familia es una rotación de la bola o bien la función nula.

16. Sean $f, g \in H^\infty(B)$ con la propiedad de que existe un número $M > 0$ tal que para todo $0 < r < 1$ existen $a_r, b_r \in H^\infty(B)$ que satisfacen

    (a) $|a_r(z)| + |b_r(z)| \leq M \quad \forall z \in B \;$ y $\; \forall\, 0 < r < 1$,

    (b) $f(rz)a_r(z) + g(rz)b_r(z) = 1 \quad \forall z \in B$.

    Probar que existen $a, b \in H^\infty(B)$ tales que $|a(z)| + |b(z)| \leq M \;\; \forall z \in B$ y

    $$f(z)a(z) + g(z)b(z) = 1 \quad \forall z \in B.$$

17. Sean $0 < \delta < \alpha \leq \pi$, Ω el sector angular dado por

    $$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 <| z |< 1, | Arg(z) |< \alpha\}$$

    y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función acotada tal que $lim_{x \to 0^+} f(x) = L$ $(x \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{C})$.

    Pruebe que $lim_{z \to 0} f(z) = L$ uniformemente en $| Arg(z) | \leq \alpha - \delta$.

    Sugerencia: considere $f_n(z) = f(z/2^n)$.