ANALISIS COMPLEJO

Práctica 1

Números Complejos - Plano Complejo

1. Exprese los siguientes números complejos de la forma $a + ib$ donde a y b son números reales.

   i) $(-1 + 3i)^{-1}$ **ii)** $(i+1)(i-1)(i+3)$ **iii)** $\dfrac{2+i}{2-i}$

   iv) $\dfrac{1+i}{i}$ **v)** $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2$ **vi)** $(1+i)^{100}$

   vii) $(1+i)^n + (1-i)^n$

2. Sean z y w dos números complejos. Muestre que

   i) $\overline{z} = z$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$

   ii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

   iii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

   iv) $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$

   v) $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

3. Pruebe que si $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $\overline{a}_n X^n + \overline{a}_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0 = 0$.
   Deducir que si $P(X)$ es un polinomio con coeficientes reales y $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $P(X)$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ también lo es.

4. Sea $\mid z \mid = \sqrt{z\overline{z}}$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Probar que

   i) Si $z = a + bi$, $\mid z \mid = \sqrt{a^2 + b^2}$

ii) $\mid z \cdot w \mid = \mid z \mid \cdot \mid w \mid$ y $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{\mid z \mid}{\mid w \mid}$

iii) $-\mid z \mid \leq Re(z) \leq \mid z \mid$ y $-\mid z \mid \leq Im(z) \leq \mid z \mid$

iv) $\mid z + w \mid^2 = \mid z \mid^2 + \mid w \mid^2 + 2Re(z \cdot \overline{w})$

v) $\mid z - w \mid^2 = \mid z \mid^2 + \mid w \mid^2 - 2Re(z \cdot \overline{w})$

vi) $\mid z + w \mid^2 + \mid z - w \mid^2 = 2\big(\mid z \mid^2 + \mid w \mid^2\big)$

vii) $\mid z + w \mid \leq \mid z \mid + \mid w \mid$

viii) $\big|\mid z \mid - \mid w \mid\big| \leq \mid z + w \mid$

5. Probar que $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $d(z, w) = \mid z - w \mid$ es una métrica.

6. Sea $\alpha = a + bi$, $z = x + iy$ y sea $c > 0$. Transforme la condición $\mid z - \alpha \mid = c$ en una ecuación que involucre solo a x, y, a, b y c; describir que figura geométrica representa esta ecuación.

7. Describir geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

   i) $\mid z - i + 3 \mid = 5$ **ii)** $\mid z - i + 3 \mid \leq 5$ **iii)** $Re(z) \geq 0$

8. **i)** Pasar de la forma $x + iy$ a la forma polar

   (a) $1 + i\sqrt{2}$ **(b)** $-5i$ **(c)** -3

   ii) Pasar de la forma polar a la forma $x + iy$

   (a) $3e^{i\frac{\pi}{4}}$ **(b)** $e^{-i\pi}$ **(c)** $\pi e^{-i\frac{\pi}{3}}$

9. Dibuje todos los complejos de la forma $z^n = 1$ para $n = 2, 3, 4, 5$.

10. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Muestre que hay n complejos distintos tales que $z^n = \alpha$.

Definición: $e^{a+bi} = e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b)$

11. **i)** Describa los z tales que $e^z = 1$.

ii) Si $e^z = e^w$, entonces hay un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w + 2k\pi i$

iii) Sean $w, \alpha \in \mathbb{C}$ tales que $e^\alpha = w$. Describa los z tales que $e^z = w$.

12. Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Muestre que

i) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

ii) Si definimos para $z \in \mathbb{C}$, $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ como arriba, los únicos valores de z para los cuales $\cos z = 0 = \operatorname{sen} z$ son los valores reales usuales.

13. Sea $z \neq 1$. Probar que $1+z+\cdots+z^n = \dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}$ y calcular $1+\cos\theta+\cdots+\cos n\theta$ para $0 < \theta < 2\pi$.

14. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} / \mid z \mid = 1\}$. Mostrar que S^1 es un subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

15. **i)** Probar que la aplicación

$$\begin{aligned} cis : (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (S^1, \cdot) \\ \theta &\longmapsto e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

es un morfismo.

ii) Probar que dado $z = x + iy \in S^1$, hay un único $\theta \in (-\pi, \pi]$, con $z = e^{i\theta}$. (Sug: $x^2 + y^2 = 1$, cos([$0, \pi$])=[-1,1]; existe $0 \leq \theta \leq \pi$ tal que $x = \cos\theta = \cos(-\theta)$).

iii) Probar que $Ker(cis) = 2\pi\mathbb{Z}$.

iv) Deducir que cis induce un isomorfismo de grupos único $arg : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "cis"] \arrow[d, "proy"'] & S^1 \\ \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \arrow[ur, dashed, "arg^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. En particular, hay una única estructura de espacio métrico en $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ que hace de arg una isometría.

Definición: Dado $z \in \mathbb{C}^*$, llamamos *argumento de* z a $\arg\left(\dfrac{z}{\mid z \mid}\right)$.

Observación: Lo anterior permite extender $\arg : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ a una función que también designamos arg de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$.

v) $\arg : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ es continua.

vi) $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$ y $\arg(1) = 0$. Luego, es un morfismo de grupos.

vii) Probar que $proy : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ tiene la siguiente propiedad: $O \subseteq \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ es abierto sii $proy^{-1}(O) \subseteq \mathbb{R}$ lo es.

Definición: Dado $z \in \mathbb{C}^*$, se llama *argumento principal de* z al único $\theta \epsilon (-\pi, \pi]$ tal que $cis\theta = \dfrac{z}{|z|}$ y se nota $\theta = Arg(z)$.

viii) Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-t \,|\, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$. Entonces $Arg/_{\Omega} : \Omega \cap S^1 \to (-\pi, \pi)$ es un homeomorfismo. (Sug: $proy : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ es abierta y luego cis también. Dado que $cis/_{(-\pi,\pi)}$ y $Arg/_{\Omega}$ son recíprocas, se deduce que son homeomorfismos)

ix) Generalizar viii) del siguiente modo

(a) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definir $Arg_{\alpha} : \mathbb{C}^* \to (-\pi + \alpha, \pi + \alpha)$ conveniente.

(b) Si $\Omega_{\alpha} = \mathbb{C} \setminus \{-te^{i\alpha} \,|\, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$, probar que $Arg/_{\Omega_{\alpha}} : \Omega_{\alpha} \to (-\pi + \alpha, \pi + \alpha)$ es un homeomorfismo.

x) Probar que no existe una determinación continua del argumento. Es decir, probar que no existe una función continua $g : S^1 \to \mathbb{R}$ tal que $cis \circ g = id$.

<u>Sucesiones</u>

16. **i)** Probar que si $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z|$.

ii) Dar un ejemplo donde no valga la recíproca.

iii) ¿Cuando vale la recíproca?

17. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

i) ni^n **ii)** $n\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ **iii)** $\left(\dfrac{(-1)^n+1}{2}\right)^n$

iv) $\cos(n\pi) + i\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$

18. **i)** Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mid \alpha \mid < 1$. ¿Cuál es el $\lim_{n\to\infty} \alpha^n$?. Demuéstrelo.

ii) Idem para $\mid \alpha \mid > 1$.

iii) Si $\mid \alpha \mid < 1$, pruebe que $\lim_{n\to\infty} \big(1+\alpha+\cdots+\alpha^n\big) = \dfrac{1}{1-\alpha}$

19. Para $\mid z \mid \neq 1$ mostrar que el siguiente límite existe

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{z^n - 1}{z^n + 1} \right)$$

¿Es posible definir $f(z)$ para $\mid z \mid = 1$ tal que f resulte continua?

20. ¿Para que números $z \in \mathbb{C}$ está definida $f(z) = \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{z^n}{z^n+1} \right)$?

21. Probar que si $|z| > 2$, la sucesión definida por: $z_0 = z$, $z_1 = z^2 + 2$, y en general $z_{n+1} = z_n^2 + 2$ para todo $n \geq 1$ verifica $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$.

22. *(optativo)* Sea $z \in S^1$ tal que $arg(z) = a\pi$ donde $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Probar que $\{z^n; n \in \mathbb{N}\}$ es denso en S^1.

Plano Complejo ampliado - Esfera de Riemann

23. Sean $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la esfera de radio 1 y centro en $(0,0,0)$. Sea $N = (0,0,1) \in S$ definimos la proyección estereográfica $\theta : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ haciendo $\theta(N) = \infty$ y dado $P \in S \setminus \{N\}$, $\theta(P) = a + ib$ sii $(a,b,0)$ es el punto de intersección de la recta $\overline{NP} \subset \mathbb{R}^3$ con el plano $x_3 = 0$.

i) Probar que $\theta(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ si $(x_1,x_2,x_3) \neq N$.

ii) Probar que θ es una biyección y su inversa está dada por

$$\varphi(z) = \Big(\frac{2Re(z)}{1+|z|^2}; \frac{2Im(z)}{1+|z|^2}; \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \Big)$$

para $z \in \mathbb{C}$.

iii) Calcular $\varphi\big(Im(z) = 0\big)$ y $\varphi\big(Re(z) = 0\big)$.

iv) Sea $\overline{d}$ la distancia en $\widehat{\mathbb{C}}$ inducida por la distancia de $\mathbb{R}^3$ vía θ, es decir, si z, $z' \in \widehat{\mathbb{C}}$, definimos $\overline{d}(z,z') = d\big(\varphi(z),\varphi(z')\big)$ donde d es la distancia eucídea.

(a) Verificar que $\overline{d}$ es una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$.

(b) Probar que la métrica usual en $\mathbb{C}$ es equivalente a la inducida en $\mathbb{C}$ por $\overline{d}$ (probar, por ejemplo, que $(\mathbb{C}, \overline{d})$ y $(\mathbb{C}, d_{usual})$ tienen las mismas sucesiones convergentes).

(c) Verificar que $\overline{d}(z,w) = \dfrac{|w-z|}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|w|^2)^{\frac{1}{2}}}$ para $z, w \in \mathbb{C}$ y $\overline{d}(z,\infty) = \dfrac{1}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}$ para $z \in \mathbb{C}$.

(d) Probar que $(\widehat{\mathbb{C}}, \overline{d})$ es un espacio métrico compacto (y por lo tanto completo).

24. Sea C una circunferencia contenida en S. Probar que hay un único plano π en $\mathbb{R}^3$ tal que $\pi \cap S = C$; use esta información para mostrar que si C pasa por N entonces su proyección en $\mathbb{C}$ es una recta. En caso contrario, se proyecta sobre una circunferencia.

Homografías

Definición: Una *homografía* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ del tipo $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ donde $ad - bc \neq 0$.

25. Probar que el conjunto $\mathcal{H}$ de las homografías es una grupo bajo la composición.

26. Sean z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que existe una única homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$. Deducir que dados puntos distintos w_2, w_3, w_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$ hay una única homografía que aplica z_2 en w_2, z_3 en w_3 y z_4 en w_4.

27. Demostrar que una homografía $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ aplica $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ si y solo si se puede escribir con coeficientes reales.

Definición: Dados z_1, z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, definimos la *razón doble* (z_1, z_2, z_3, z_4) por $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \dfrac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}$. Observar que (z_1, z_2, z_3, z_4) es la imagen de z_1 bajo la homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$

28. **i)** Probar que si $T \in \mathcal{H}$ entonces $\big(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)\big) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$

ii) Demostrar que z_1, z_2, z_3, z_4 yacen en una circunferencia si y solo si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

Definición: Sea C una circunferencia de $\widehat{\mathbb{C}}$ y z_2, z_3, z_4 puntos de C. Dos puntos z y z^* son *simétricos* respecto de C sii $\overline{(z, z_2, z_3, z_4)} = (z^*, z_2, z_3, z_4)$.

29. **i)** Probar que la definición anterior no depende de los punto elegidos z_2, z_3, z_4 sino de C.

ii) Probar que cada punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tiene un solo punto z^* simétrico respecto de C. A la aplicación que a cada $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ le asigna su simétrico respecto de C se la llama *simetría respecto de* C. Probar que para cada homografía T que aplica $\mathbb{R}$ en C, la función

$$T \circ \overline{T^{-1}} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$

es la simetría respecto de C.

iii) Interpretar geométricamente la noción de simetría en el caso en que C es una recta.

iv) Probar que si S es una homografía y z, z^* son simétricos respecto de una circunferencia C, entonces $S(z)$ y $S(z^*)$ son simétricos respecto de $S(C)$.

30. Probar que el simétrico del centro de una circunferencia C (respecto a C) es ∞.

31. Hallar homografías que transformen

i) los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.

ii) la circunferencia $|z| = 2$ en $|z+1| = 1$ y además -2 en 0 y 0 en i.

iii) el disco $|z| < R$ en si mismo y además α en 0 ($|\alpha| < R$).

iv) El semiplano superior $Im(z) > 0$ en $|z| < 1$ y α en 0 (donde $Im(\alpha) > 0$).

32. Sea $S(z) = \dfrac{z+i}{z+1}$. Sea $z_1 = 1$ y $z_n = S(z_{n-1})$ para $n \geq 2$. Pruebe que $\lim_{n\to\infty} z_n$ existe y es igual a $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. (sug: $T(w) = \dfrac{w-\sqrt{i}}{w+\sqrt{i}}$ donde $w = S(z)$.)

33. Sea $S(z) = \dfrac{z+2}{z+1}$, $z \neq -1$ y definamos $z_0 = i$, $z_n = S(z_{n-1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

i) Probar que $Re z_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Probar que la sucesión $(z_n)_{n \geq 1}$ es acotada.

iii) Probar que $z_n \to \sqrt{2}$.

ANALISIS COMPLEJO

Práctica 2

1. Hallar los términos de orden ≤ 3 en las series de potencias:

i) $e^z \operatorname{sen} z$ ii) $(\operatorname{sen} z)(\cos z)$ iii) $\dfrac{e^z - 1}{z}$

iv) $\dfrac{e^z - \cos z}{z}$ v) $\dfrac{1}{\cos z}$ vi) $\dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$

vii) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ viii) $\dfrac{e^z}{\operatorname{sen} z}$

2. Sea $f(z) = \sum_n a_n z^n$. Se define $f(-z) := \sum_n a_n(-z)^n = \sum_n a_n(-1)^n z^n$. Se dice que $f(z)$ es *par* (*impar*) si $a_n = 0$ para todo n impar (par). Mostrar que f es par sii $f(-z) = f(z)$ y f es impar sii $f(-z) = -f(z)$.

3. Se definen los **números de Bernoulli** B_n por la serie de potencias:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

Probar la fórmula recursiva:

$$\frac{B_0}{n!0!} + \frac{B_1}{(n-1)!1!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{1!(n-1)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

Entonces $B_0 = 1$. Calcular B_1, B_2, B_3, B_4. Mostrar que $B_n = 0$ si n es impar $\neq 1$.

4. Mostrar que

$$\frac{z}{2}\frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

Reemplazar z por $2\pi i z$ y demostrar:

$$\pi z \cot \pi z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}$$

5. Expresar las series de potencias $\tan z$, $\dfrac{z}{\operatorname{sen} z}$ y $z \cos z$ en términos de los números de Bernoulli.

6. Dados números complejos a_0, a_1, u_1, u_2 se define a_n para $n \geq 2$ por:

$$a_n = u_1 a_{n-1} + u_2 a_{n-2}$$

Si se tiene una factorización

$$T^2 - u_1 T - u_2 = (T - \alpha)(T - \beta)$$

con $\alpha \neq \beta$, mostrar que los números a_n están dados por $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ siendo A, B números complejos adecuados. Hallar A, B en términos de a_0, a_1, α y β. Considerar la serie de potencias

$$F(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$$

Mostrar que esta serie representa una función racional, y dar su descomposición en fracciones simples.

7. Más generalmente, sean $a_0, \ldots, a_{r-1}$ números complejos dados. Sean $u_1, \ldots, u_r$ números complejos tales que el polinomio

$$P(T) = T^r - (u_1 T^{r-1} + \cdots + u_r)$$

tiene raíces distintas $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Se define a_n para $n \geq r$ por

$$a_n = u_1 a_{n-1} + \cdots + u_r a_{n-r}$$

Mostrar que existen números $A_1, \ldots, A_r$ tales que para todo n

$$a_n = A_1 \alpha_1^n + \cdots + A_r \alpha_r^n$$

8. **Criterio de Weierstrass**
Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \to \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Se tiene entonces la siguiente implicación: Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente en X.

9. Sean $(A_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de números complejos tales que $(A_n \cdot v_n)_{n\geq 1}$ converge, entonces

$$A_0 v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n-1}) \cdot v_n \text{ converge si y solo si } \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot (v_n - v_{n+1}) \text{ converge.}$$

10. **Criterio de Dirichlet**

Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos que converge a cero y existe $M > 0$ tal que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z_n$ converge.

(Sugerencia: $\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot z_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{(a_k - a_{k+1}) \cdot \sum_{i=1}^{k} z_i\right\} + a_n \sum_{k=1}^{n} z_k$).

11. **Criterio de Bois-Reymond**

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - v_{n+1})$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot v_n$ converge.

12. Estudiar la convergencia de la serie cuyo término general es el siguiente:

i) $a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$ **ii)** $a_n = \dfrac{1}{2n}$ **iii)** $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

iv) $a_n = \left(\dfrac{3n}{2n+1}\right)^n$ **v)** $a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **vi)** $a_n = \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

vii) $a_n = \dfrac{\rho^n n!}{n^n}$ $(\rho > 0)$

13. Demostrar que si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de números reales positivos tal que existe $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \mathcal{L}$, entonces existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ y es igual a $\mathcal{L}$.

14. Demostrar que la serie de término general $a_n = \dfrac{1}{n^p\big(\log(n)\big)^q}$

i) converge para todo $q > 0$ si $p > 1$.

ii) converge para $q > 1$ y $p = 1$.

iii) diverge para todo $q > 0$ si $p < 1$.

iv) diverge para $0 < q \leq 1$ y $p = 1$.

15. Sea $r > 0$. Si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} / \sqrt[n]{a_n} > r\}$ es infinito entonces el radio de convergencia R de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n$ es 0 o bien $R \leq r^{-1}$.

16. Probar que los conjuntos de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} \cdot z^n$ son iguales.

17. Calcular el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$ **ii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+(1+i)^n}$ **iii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$ **v)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$ **vi)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2}$

vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n \quad (a \in \mathbb{C})$ **viii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n \quad (a \in \mathbb{C})$ **ix)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$

x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ **xi)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$ **xii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n+1}}{(n+1)^3 4^n}$

xiii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$ **xiv)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n (z-i)^n}{4^n (n^2+1)^{\frac{5}{2}}}$ **xv)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen} n) z^n$

xvi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n z^n}{5^n}$ **xvii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n z^n}$ **xviii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$

xix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (z^4 + 2z^2 + 1)^n}{7^n}$

18. Determinar el conjunto de convergencia *absoluta* de la siguientes series

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n + z^{n+1}$ **ii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)^n}$ **iii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) z^n}$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}$ **v)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}$ **vi)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+|z|}$

vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}$ **viii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n z}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$ **ix)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$

x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$

19. Hallar todos los números complejos z, tales que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\ln n - 1)}{(n-2)^2} \left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha} z} \right)^n$$

converge, siendo α un número complejo fijo con $|\alpha| < 1$.

20. Mostrar que si el radio de convergencia de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es $\rho > 0$, entonces el de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^p z^n$ es también ρ.

ANALISIS COMPLEJO

Práctica 3

1. Sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ relacionadas por $g(x,y) = f(x+iy)$.

   i) Suponiendo que f es derivable en $z_0 = a+ib$, probar que g es diferenciable en (a,b). Calcular $f'(z_0)$ y $Dg(a,b)$.

   ii) ¿Es cierto que si g es diferenciable en (a,b) entonces f resulta derivable en $a+ib$?

   iii) Hallar todas las funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ derivables en todo punto.

2. Sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ relacionadas por $f(x+iy) = u(x+iy) + i \cdot v(x+iy)$; $g(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$. Supongamos que f es derivable en z_0.

   i) Calcular $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ y $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih}$ en términos de u y v. ¿Que se deduce?

   ii) Suponiendo que u y v son C^2, calcular $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ y $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

   iii) Si $z_0 = a+ib$, probar que g es diferenciable en (a,b). Calcular $|f'(z_0)|$ y el jacobiano de $Dg(a,b)$ en términos de u y v.

3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3 + i(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad x+iy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x+iy = 0 \end{cases}$$

   Verificar que f es continua en 0 y cumple las condiciones de Cauchy-Riemann pero *no* es derivable.

4. Determinar los puntos donde f es derivable y donde es holomorfa.

   i) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x+iy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$ **ii)** $f(z) = \overline{z}$

   iii) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$ **iv)** $f(z) = x^2 + iy^2$

5. Analizar donde son holomorfas las siguientes funciones. Hallar $f'(z)$ en cada caso.

i) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ **ii)** $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$

iii) $f(z) = x^2 + iy^3$ **iv)** $f(z) = z^2 \cdot \overline{z}$

v) $f(z) = z^3 - 2z$ **vi)** $f(z) = \dfrac{z+1}{1-z}$

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo. Probar:

i) Si f y $\overline{f}$ son holomorfas en Ω, entonces f es constante.

ii) Si f es holomorfa en Ω y $f' \equiv 0$ en Ω, entonces f es constante.

iii) Si f es holomorfa en Ω y $f' \equiv g'$ entonces $f - g$ es constante.

7. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Demostrar:

i) $Re(f) = cte \;\Rightarrow\; f$ cte.

ii) $Im(f) = cte \;\Rightarrow\; f$ cte.

iii) $|f| = cte \;\Rightarrow\; f$ cte.

iv) $\arg(f) = cte \;\Rightarrow\; f$ cte.

8. Sea D un abierto simétrico respecto del eje real y $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa. Probar que la función $g : D \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa.

9. **i)** Sea $L \subseteq \mathbb{R}^2$ una recta. Probar que si $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa e $Im(g) \subseteq L$ entonces g es constante.

ii) Sean $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y $L_1, \cdots, L_N$ rectas (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{C}$). Probar que si $Im(g) \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_N$ entonces g es constante.

10. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Decimos que v es la *conjugada armónica* de u si $f(z) = u + iv$ es holomorfa.

i) Hallar la conjugada armónica de $u(x, y) = x^2 - y^2$ y de $u(x, y) = 2x(1 - y)$

ii) Probar que si v y $\tilde{v}$ son conjugadas armónicas de u, entonces v y $\tilde{v}$ difieren en una constante.

iii) Probar que si u y v son mutuamente conjugadas armónicas; entonces son constantes.

11. Sea $V \subset \mathbb{R}^2$ un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $u : V \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^2$. Probar que si u admite una conjugada armónica entonces u es armónica, es decir, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

12. **Regla de L'Hospital**
Sean f, g funciones holomorfas en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces:
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$
(Sugerencia: $f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \eta(z)(z - z_0)$ donde $\lim\limits_{z \to z_0} \eta(z) = 0$).

13. Calcular:

i) $\displaystyle \lim_{z \to i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1}$ **ii)** $\displaystyle \lim_{z \to 2i} \frac{z^2 + 4}{2z^2 + (3 - 4i)z - 6i}$

iii) $\displaystyle \lim_{z \to e^{\frac{\pi \cdot i}{3}}} \frac{(z - e^{\frac{\pi \cdot i}{3}}) \cdot z}{z^3 + 1}$ **iv)** $\displaystyle \lim_{z \to i} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1}$

14. Sea $T(z) = \dfrac{z + 1}{z + 2}$

i) Hallar las soluciones de la ecuación $T(z) = z$. Los puntos hallados se llaman los *puntos fijos* de T.

ii) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ arbitrario, se define la sucesión $z_n = T(z_{n-1})$ para $n \geq 0$. Verificar que, si z_n converge, el posible límite es uno de los punto fijos de T.

iii) Se llama *circunferencia isométrica* de T al conjunto $C_T := \{z \in \mathbb{C} / |T'(z)| = 1\}$. Verificar que si $p, q \in C_T$ entonces $|T(p) - T(q)| = |p - q|$. ¿ Que sucede si $|T'(p)|$ y $|T'(q)|$ son mayores (respectivamente menores) que 1?

iv) Calcular $T(C_T)$. Si $R = \{z \in \mathbb{C} / |T'(z)| < 1\}$ y $S = \{z \in \mathbb{C} / |T'(z)| > 1\}$, calcular $T(R)$ y $T(S)$.

v) Ubicar los puntos fijos en R o S. Demostrar que la sucesión definida en ii) converge y hallar su límite.

vi) Si $T(z) = \dfrac{2z+5}{-z-2}$ ¿ Que sucede con la sucesión definida en ii)?

15. **Función exponencial**

Sea $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ y $g(z) = e^z$.

i) Verificar que $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son funciones holomorfas con $f'(z) = f(z)$ y $g'(z) = g(z)$. Demostrar que $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ es constante y deducir que $f \equiv g$.

ii) Probar que $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$.

iii) Verificar que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

iv) Mostrar que e^z tiene período $2\pi i$.

v) Analizar la existencia de $\displaystyle\lim_{z\to\infty} e^z$.

16. **Funciones trigonométricas**

i) Calcular las derivadas de $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$.

ii) Comprobar que $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$ y que $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$

iii) Las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$, ¿están acotadas?

iv) Mostrar que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ tienen período 2π.

17. **Logaritmo**

Definición: Sea Ω abierto y conexo. Se dice que una función continua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una *rama del logaritmo* en Ω si se verifica $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

i) Si $0 \in \Omega$, ¿puede existir una rama del logaritmo en Ω?

ii) Probar que si f y g son dos ramas del logaritmo en Ω, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f - g \equiv 2k\pi i$. Concluir que si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = g(z_0)$, entonces $f \equiv g$.

iii) Sean $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \ln|z| + i \arg(z)$. Comprobar que si fijamos $-\pi < \arg z < \pi$; entonces f es una rama del logaritmo. Dicha rama se dice la *rama principal del logaritmo*.

iv) Sean $f : \Omega' \to \Omega$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ ($\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ abiertos) funciones continuas tales que $g \circ f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que si g es holomorfa en

Ω y $g'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces f también es holomorfa y vale $f'(z) = \dfrac{1}{g'\big(f(z)\big)}$.

v) Verificar que toda rama del logaritmo es holomorfa y calcular su derivada.

vi) Calcular: $\log i$, $\log 1$, $\log(1+i)$, $e^{\log i}$.

18. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, llamamos *rama raíz cuadrada* de z, rama de $\sqrt{z}$, en Ω a toda función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $\big(g(z)\big)^2 = z$ para todo $z \in \Omega$.

i) Probar que si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, hay exactamente dos ramas de $\sqrt{z}$ en Ω. Definirlas.

ii) Probar que toda rama de $\sqrt{z}$ es holomorfa.

iii) Si Ω es conexo y f es una rama de $\sqrt{z}$ en Ω, entonces f y $-f$ son todas las ramas.

iv) Si existe una rama de $\sqrt{z}$ en Ω, entonces $0 \notin \Omega$.

19. Sean $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una rama del logaritmo, $b \in \mathbb{C}$, $a \in \Omega$. Definimos $z^b = e^{b \cdot g(z)}$ y $a^z = e^{z \cdot g(a)}$.

i) ¿Los valores de z^b y a^z están bien definidos?

ii) Fijando una rama del logaritmo, demostrar que z^b y a^z son funciones holomorfas.

iii) Verificar que si $b \in \mathbb{Z}$, z^b está bien definida y coincide con $\underbrace{z \cdot z \cdots z}_{b \text{ veces}}$.

iv) Calcular i^i considerando la rama principal del logaritmo. Hallar los demás valores considerando las restantes ramas. Idem para $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π.

v) Sean $z \in \Omega$, $a, b \in \mathbb{C}$. Consideremos los conjuntos:

$A = \{w \in \mathbb{C} \text{ tales que } w = z^{a+b}\}$ $\quad B = \{w \in \mathbb{C} \text{ tales que } w = z^a \cdot z^b\}$

$C = \{w \in \mathbb{C} \text{ tales que } w = \big(z^a\big)^b\}$ $\quad D = \{w \in \mathbb{C} \text{ tales que } w = z^{a \cdot b}\}$

¿Qué relación hay entre ellos?

20. **i)** Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ y $\alpha = k\mathrm{i}$ con $k \in \mathbb{N}$. Probar que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe una rama holomorfa de $(z^2+1)^\alpha$ definida en Ω tal que $f(0) = 1$. Calcular su derivada.

ii) ¿Es cierto que $(z^2+1)^\alpha = \Big((z^2+1)^i\Big)^k = \Big((z^2+1)^k\Big)^i$?

21. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ y $n \in \mathbb{N}$. Hallar todas las funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tales que $\big(f(z)\big)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. Determinar, para cada f, su imagen.

22. Hallar un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y dos funciones continuas distintas $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ tales que $f^2(z) = g^2(z) = 1 - z^2$. ¿Son f y g holomorfas? ¿Puede hallar Ω maximal?

ANALISIS COMPLEJO

Práctica 4

1. Calcular

   $\int_\gamma \overline{z} dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ $\gamma(t) = e^{it}$

   $\int_\gamma |z| z dz$ para $\gamma :$

2. Calcular $\int_\gamma (z-a)^n dz$ si n es un entero distinto de -1 y $\gamma : |z-a| = r$.

3. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva. Notamos por $-\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ a la curva $-\gamma(t) = \gamma(1-t)$. Probar que $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$.

4. Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $T(z) = az + b$ con $a \neq 0$. Dadas una curva γ y $c \notin \gamma$, probar que
$$\int_\gamma \frac{dz}{z-c} = \int_{T \circ \gamma} \frac{dz}{z - T(c)}$$

5. Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definida por $\gamma(t) = a + re^{it}$. Probar que $\int_\gamma \frac{dz}{z-b} = 2\pi i$ para todo $b \in B(a, r)$.

6. Sea $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, dada por $\gamma_r(t) = re^{it}$. Probar que $\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \to 0$ cuando $r \to \infty$.

7. Probar que si $d(a, b) > r$ entonces $\int_{|t-a|=r} \frac{dz}{z-b} = 0$.

8. Calcular $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log(1+z)}{(z-\frac{1}{2})^3} dz$ siendo $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ la curva $\gamma(t) = \frac{2}{3} e^{it}$.

9. Evaluar $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz$ siendo γ alguna de las siguientes curvas:

10. Encontrar todos los posibles valores de $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$, donde γ es una curva diferenciable que no pasa por $\pm i$.

11. Sea γ la curva cuya imagen es la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ parametrizada por $\gamma(t)=a\cos t+ib\operatorname{sen} t$ con $0\le t\le 2\pi$.
Calcular $\int_\gamma \dfrac{dz}{z}$ y deducir que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2\cos^2 t+b^2\operatorname{sen}^2 t}=\frac{2\pi}{ab}$.

12. Sean $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos y $f:Im\gamma\to\mathbb{C}$ una función continua. Definimos $\varphi:Im\gamma\times(\mathbb{C}\setminus Im\gamma)\to\mathbb{C}$ por $\varphi(w,z)=\dfrac{f(w)}{w-z}$ y $g:\mathbb{C}\setminus Im\gamma\to\mathbb{C}$ por $g(z)=\int_\gamma\varphi(w,z)dw$. Probar que g es holomorfa y $g^{(n)}(z)=n!\displaystyle\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$.

13. Sean $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ un abierto y $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ una curva cerrada diferenciable a trozos. Sea $\varphi:Im\gamma\times\Omega\to\mathbb{C}$ una función continua y $g:\Omega\to\mathbb{C}$ definida por $g(z)=\int_\gamma\varphi(w,z)dw$.
Probar que:

i) g es continua.

ii) Si para todo $w\in Im\gamma$, la función $\varphi(w,-):\Omega\to\mathbb{C}$ es holomorfa (es decir $\dfrac{\partial\varphi(w,z)}{\partial z}$ es continua), entonces g es holomorfa y $g'(z)=\displaystyle\int_\gamma\frac{\partial\varphi(w,z)}{\partial z}dw$.

14. Sea $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ una curva cerrada diferenciable a trozos. Para todo $a\in\mathbb{C}\setminus Im\gamma$ se define el *índice* $\eta(\gamma,a)$ *de* a *con respecto a* γ por

$$\eta(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a}$$

Demostrar que $\eta(\gamma,a)\in\mathbb{Z}$.

15. Sea γ una curva como en el ejercicio anterior.

i) Probar:

(a) $\eta(\gamma, a) = -\eta(-\gamma, a)$ donde $-\gamma : [-\beta, -\alpha] \to \mathbb{C}$ se define por $-\gamma(t) = \gamma(-t)$.

(b) $\eta(\gamma, a) = 0$ para todo $a \notin \triangle = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq \max|\gamma|\}$.

(c) $\eta(\gamma, a)$ es constante como función de a en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus Im\gamma$.

ii) Sea $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada arbitraria y $a \in \mathbb{C} \setminus Im\gamma$.

(a) Probar que existe una función continua $\mu : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) - a = |\gamma(t) - a| e^{i\mu(t)}$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$.

S e define el índice $\eta(\gamma, a)$ de a respecto de la curva γ por

$$\eta(\gamma, a) = \frac{\mu(\beta) - \mu(\alpha)}{2\pi}$$

(b) Probar que esta definición no depende de μ.

(c) Probar que valen los ítems (a), (b) y (c) de i) y que cuando γ es diferenciable a trozos esta definición coincide con la anterior.

16. Calcular

$$\int_{\gamma_k} \left(\frac{z}{z+1}\right)^n dz \qquad \gamma_k(t) = 1 + e^{ikt} \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_{\gamma_k} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} dz \qquad \gamma_k(t) = e^{ikt} \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

17. Sea $f_n : A \to \mathbb{C}$. Si $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ en una curva $\gamma \subseteq A$ entonces $\int_\gamma f_n(z)dz \longrightarrow \int_\gamma f(z)dz$.

18. Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f_n, f : A \to \mathbb{C}$ tales que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ en B para todo compacto B de A (notar que f_n puede no tender uniformemente a f en A). Probar que si f_n es holomorfa en A para todo $n \geq n_0$, entonces f es holomorfa en A y $f_n' \xrightarrow{\text{unif}} f'$ en B para cada compacto B de A.

19. Probar que $f(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt^2} dt$ es una función holomorfa en $\Re(z) > 0$.

20. Probar que si $f(z)$ es *continua* en el disco cerrado $|z| \leq r$ y holomorfa en el disco abierto $|z| < r$, se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

para todo $|z| \leq r$.

21. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, $a \neq b$, y sea γ la curva en la siguiente figura:

i) Mostrar que $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$.

ii) *Convencerse* de que γ no es homotópica a cero.

Definición: Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, decimos que una curva γ contenida en él es *homóloga a cero* si $\eta(\gamma, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

iii) Probar que γ es homóloga a cero en Ω.

ANALISIS COMPLEJO

Práctica 5

1. Probar que si Ω es simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f tiene una primitiva en Ω. ¿Es necesaria la hipótesis de simplemente conexo?

2. Sea Ω simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Demostrar que existe una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$. Si $z_0 \in \Omega$ y $e^{w_0} = f(z_0)$ se puede elegir g de modo que $g(z_0) = w_0$.

3. **i)** Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, $f \not\equiv 0$. Probar que para cada $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa con $g(a) \neq 0$ tales que $f(z) = (z-a)^n g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

   ii) Con las hipótesis de i) verificar que el conjunto de ceros de f es discreto. Deducir que en todo compacto de Ω f tiene sólo un número finito de ceros.

4. **i)** ¿Existe f holomorfa en $|z| < 1$ tal que $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

   ii) ¿Existe f holomorfa en un entorno de 0 tal que $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?.

   iii) Idem ii) para $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.

5. Sea $f(z) = \cos\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, $|z| < 1$. Verificar que los ceros de f son los puntos de la forma $z_n = \frac{n\pi-2}{n\pi+2}$ con n impar, que f es holomorfa en $|z| < 1$ y que los ceros de f tienen un punto de acumulación. ¿Es $f \equiv 0$ en $|z| < 1$? ¿Contradice esto algún resultado conocido?

6. Sean f y g dos funciones holomorfas en un abierto conexo Ω del plano complejo, no nulas en Ω; si existe una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de puntos de Ω tales que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad a \in \Omega, \qquad a_n \neq a \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

y además

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

probar que existe entonces una constante c tal que $f(z) = cg(z)$ en Ω.

7. Demostrar que si f y g son holomorfas en Ω y $\overline{f}g$ es holomorfa en Ω, entonces $g \equiv 0$ o f es constante.

8. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica no suryectiva.

   i) Probar que u está acotada superior o inferiormente.

   ii) Probar que u es constante (por lo tanto, toda función armónica es constante o suryectiva).

9. Sea f entera y R un número real positivo tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo z tal que $|z| > R$. Probar que f es un polinomio de grado menor o igual que n.

10. Hallar todas las funciones enteras tales que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 5$.

11. Sea f entera tal que existen números complejos z_0, z_1 $\mathbb{R}$-linealmente independientes tales que $f(z + z_0) = f(z)$ y $f(z + z_1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que f es constante.

12. Formular y demostrar el "principio de módulo mínimo" para funciones holomorfas.

13. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ conexo con $\overline{\Omega}$ compacto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y no constante tal que $|f(z)| = \text{cte}$ para todo $z \in \partial\overline{\Omega}$. Probar que existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = 0$.

14. Sea Ω un abierto acotado y conexo y consideremos n puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Probar que el producto $\overline{PP_1} \cdot \ldots \cdot \overline{PP_n}$ de las distancias de un punto P, que recorre la adherencia $\overline{\Omega}$, a los puntos $P_1, \ldots, P_n$ alcanza su máximo en un punto de la frontera de Ω.

15. Sea f una función holomorfa en el disco $|z| < 1$ tal que $|f(z)| < 1$ en este disco; si existen dos puntos a y b del disco distintos, tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces se tiene $f(z) = z$ en el disco. (Sugerencia: Considerar la función

$$g(z) = \frac{h(z) - a}{1 - \overline{a}h(z)}, \quad \text{con} \quad h(z) = f\left(\frac{z + a}{1 + \overline{a}z}\right)$$

y usar el Lema de Schwarz).

ANALISIS COMPLEJO

Práctica 6

1. Sea $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$; hallar el desarrollo en serie de Laurent de f en cada uno de los siguientes anillos:

   i) $0 < |z| < 1$ **ii)** $1 < |z| < 2$ **iii)** $|z| > 2$

   iv) $1 < |z-1| < 2$ **v)** $|z-2| > 1$ **vi)** $0 < |z-1| < 1$

2. Hallar el coeficiente de z en el desarrollo de Laurent de $\dfrac{e^z}{z-1}$ en $|z| > 1$.

3. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Mostrar que

$$e^{\frac{1}{2}\lambda\left(z+\frac{1}{z}\right)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

para $0 < |z| < \infty$, donde para $n \geq 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda \cos t} \cos ntdt$$

4. Considere la serie de Laurent

$$\cdots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

¿Que tipo de singularidad tiene en 0?

5. Sea $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-a)^k$ válido para $r_1 < |z-a| < r_2$ con $r_2 > r_1 \geq 0$. ¿Que se puede decir del comportamiento de f en a si:

   i) $a_k = 0$ para todo $k \leq -n_0$ con $n_0 \in \mathbb{N}$.

   ii) para todo $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ existe $m \leq k$ tal que $a_m \neq 0$.

   iii) $a_k = 0$ para todo $k \geq n_0 > 0$.

6. Verificar que si f tiene una singularidad no evitable en $z = i$ y en $z = 2i$, entonces el desarrollo en serie de Laurent de f en $1 < |z| < 2$ tiene infinitos términos negativos e infinitos términos positivos no nulos.

7. **i)** Verificar que f tiene un cero de orden k en $z = a$ sii $\frac{1}{f}$ tiene un polo de orden k en $z = a$.

   ii) Si f tiene un cero (polo) de orden k en $z = a$ y g tiene un cero (polo) de orden k en $z = a$ ¿Que clase de singularidad tiene $\frac{f}{g}$ en $z = a$? (considere todos los casos posibles).

8. Cada una de las siguientes funciones tiene una singularidad aislada en $z = 0$. Determine su naturaleza; si es evitable defina $f(0)$ de modo que resulte holomorfa en $z = 0$, si es un polo halle la parte singular.

i) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$ **ii)** $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$ **iii)** $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z}$

iv) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ **v)** $f(z) = \dfrac{\log(z+1)}{z}$ **vi)** $f(z) = \frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z}\right)$

vii) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z+1)}$ **viii)** $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$ **ix)** $f(z) = z\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$

9. Sea $f(z) = \dfrac{a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0}$. Probar que ∞ es a lo sumo una singularidad aislada. Clasificarla de acuerdo con el grado de los polinomios.

10. **i)** Pruebe que una función entera tiene una singularidad evitable en ∞ sii es constante.

    ii) Pruebe que una función entera tiene un polo de orden n en ∞ sii es un polinomio de grado n.

11. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ enteras y biyectivas.

12. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones en $\widehat{\mathbb{C}}$. En el caso de ceros

o polos determinar el orden.

i) $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{z^2}$

ii) $f(z) = \cos z e^{-\frac{1}{z^2}}$

iii) $f(z) = \dfrac{1}{z^3 + 7z^2 + z + 5} + ze^{\frac{1}{z}}$

iv) $f(z) = \dfrac{z^5}{1 + z^4}$

v) $f(z) = \left(\operatorname{sen} \frac{1}{z^2}\right)^{-1}$

vi) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$

vii) $f(z) = \dfrac{\cos z - \operatorname{sen} z}{z^4 + 2z^2 + 1}$

viii) $f(z) = \operatorname{sen} \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$

ix) $f(z) = \dfrac{1}{\cos z - 1}$

13. **i)** Si z_0 es una singularidad esencial de f y un polo de g, decidir que tipo de singularidad tienen $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ en z_0.

ii) Probar que una singularidad aislada de f no puede ser un polo de $e^{f(z)}$.

14. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ que contiene a 0. Probar que no existe una función continua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $\big(f(z)\big)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. (sugerencia: Probar que una tal f restringida a $\Omega \setminus \{0\}$ debe ser holomorfa, deducir que f es holomorfa en Ω y estudiar la multiplicidad de 0 como cero de f)

Residuos

15. Calcular los residuos de f en cada una de sus singularidades aisladas y en ∞

i) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)}$

ii) $f(z) = \dfrac{1}{z^3} \operatorname{sen} z$

iii) $f(z) = z^5 \cos \dfrac{1}{z}$

iv) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1 + z}$

16. **i)** Sea a un polo de orden m de f y sea $g(z) = (z-a)^m . f(z)$, entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$$

ii) Deduzca que si a es un polo simple de f entonces

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

17. Sea f una función meromorfa en un abierto conexo Ω.

i) Si f tiene un polo de orden m en $\alpha \in \Omega$ su derivada logarítmica tiene en él un polo simple, siendo $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f},\alpha\right) = -m$.

ii) Si f tiene un cero de orden m en $\beta \in \Omega$, su derivada logarítmica tiene en él un polo simple, siendo $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f},\beta\right) = m$.

iii) Si f tiene un polo simple en a y g es holomorfa en a probar que

$$\operatorname{Res}(f\cdot g,a) = \operatorname{Res}(f,a)\cdot g(a)$$

18. Calcular los siguientes residuos:

i) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2 z}$ en $z = 0,1$ **ii)** $\dfrac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ en $z=\infty$

iii) $\dfrac{e^{az}}{1+e^z}$ en $z = \pi i$ **iv)** $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(1+z)z}$ en $z = 0,-1,\infty$

19. Sea C la circunferencia $|z| = 2$ recorrida en el sentido positivo. Calcular

i) $\displaystyle\int_C \frac{z}{z^4+1}$ **ii)** $\displaystyle\int_C \frac{1+\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z}dz$ **iii)** $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z+1)^4(z^2-9)(z-4)}$

20. Sea $\Omega = \mathbb{C}\setminus[-1,1]$. Se define en Ω la función $f(z) = z^2\log\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ tomando para el logaritmo la determinación que es real cuando z es real y mayor que 1.

i) Calcular $\operatorname{Res}(f,\infty)$.

ii) Calcular $\int_C f(z)dz$ siendo $C : |z| = 2$ recorrida en sentido positivo.

21. Sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorfa salvo en los polos simples $a_1,\ldots,a_n$. Si $g:\Omega\to\mathbb{C}$ es holomorfa, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)g(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\eta(\gamma,a_k)g(a_k)\operatorname{Res}(f,a_k)$$

para toda curva γ que no pasa por $a_1, \ldots, a_n$ y tal que $\eta(\gamma, \omega) = 0$ para todo $\omega \notin \Omega$.

22. Sea f meromorfa en Ω con ceros $z_1, \ldots, z_n$ y polos $p_1, \ldots, p_n$ contados con su multiplicidad. Si g es holomorfa en Ω y γ es una curva cerrada tal que $\eta(\gamma, z) = 0$ para todo $z \notin \Omega$, y que no pasa por ningún cero ni ningún polo, probar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} g(z_i)\eta(\gamma, z_i) - \sum_{j=1}^{m} g(p_j)\eta(\gamma, p_j)$$

23. Sea f holomorfa en $\overline{B_R(a)}$ e inyectiva en $B_R(a)$. Si $G = f\big(B_R(a)\big)$ y γ : $|z - a| = R$, probar que f^{-1} está definida en G y para cada $\omega \in G$ se tiene

$$f^{-1}(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z) - \omega}dz$$

24. Sea f entera y γ una curva como en la figura

Si $\displaystyle\int_\gamma z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$ probar que f no se anula en el interior de γ.

25. Sea f meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que $f(z + 3i) = f(z)$ y $f(z + 1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Demostrar que si f no tiene polos ni ceros en γ, entonces la cantidad de ceros de f en γ es igual a la cantidad de polos de f en γ (contados con su multiplicidad), siendo γ la curva:

26. Sea f una función par y doblemente periódica en $\mathbb{C}$ (i.e. existen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ tales que $\omega_1, \omega_2 \neq 0$, $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$ y $f(z + \omega_1) = f(z)$ y $f(z + \omega_2) = f(z)$).

Demostrar que si a es cero de f y $a = 2\omega_1$ o $a = 2\omega_2$; entonces el orden de a como cero es mayor o igual que 2.

27. **i)** Demostrar que la función $\pi \operatorname{cotg}(\pi z)$ tiene un polo simple con residuo 1 en cada entero. Esto mismo es cierto para la función

$$\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2} == \lim_{n\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n}$$

Demostrar que ambas funciones son periódicas ($f(z+1)=f(z)$) y que su diferencia es una función entera acotada.

Concluir que

$$\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}=\pi \operatorname{cotg}(\pi z)$$

ii) Sumar las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

28. Consideremos la ecuación $z^5+15z+1=0$.

i) Probar que tiene una única raíz en $|z|<\frac{3}{2}$.

ii) ¿Hay alguna raíz en $|z|\geq 2$?

29. Probar que la ecuación $z^n e^{\alpha-z}=1$ $(\alpha>1)$, tiene exactamente n raíces en $|z|<1$.

30. Pruebe que la función $f(z)=2z^5+7z-1$ tiene una raíz real positiva en $|z|<1$ y que el resto de las raíces están en $1<|z|<2$.

31. Sea f holomorfa alrededor de z_0 . Probar que f es inyectiva en algún entorno de z_0 si y solo si $f'(z_0)\neq 0$.

32. Sea f holomorfa y no constante en $\Delta:=\{|z|<r\}$ tal que $f(0)=0$. Probar que existe un entorno Ω de 0 contenido en Δ y $g:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva tal que $g(\Omega)=\{|z|<s\}$ para algún s y $f(z)=g(z)^{\mathrm{mult(f,0)}}$ para todo $z\in\Omega$.

<u>Cálculo de integrales reales mediante el Teorema de los Residuos</u>

33. **i)** Sea $R(x,y)$ una función racional con coeficientes reales sin polos en la circunferencia unidad. Probar que

$$\int_0^{2\pi} R(\operatorname{sen} t,\cos t)dt = 2\pi\sum_{|z_k|<1}\operatorname{Res}\left\{\frac{1}{z}R\left[\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\right\}$$

ii) Calcular

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \operatorname{sen} t} \quad (a \in \mathbb{R}, a^2 > 1)$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b\cos t)^2} \quad (0 < b < a)$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(2t)}{1 - 2a\cos t + a^2} dt \quad (a \in \mathbb{R}, a^2 < 1)$

34. **i)** Sea $R : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$. una función racional con coeficientes reales y sin polos reales. Supongamos que $\lim_{|z|\to\infty} zR(z) = 0$. Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} R(z)$$

con la suma extendida a los polos de R situados en el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$.

ii) Calcular

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$

35. **i)** Sea f una función holomorfa en un entorno del semiplano $\operatorname{Im} z \geq 0$, salvo en un número finito de puntos ninguno de los cuales está sobre el eje real. Supongamos que f verifica $\displaystyle\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} |f(z)| = 0$

Entonces

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}\ z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, z_k)$$

ii) Calcular

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} dx$

(c) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}dx$

36. **i)** Sea f como en i) del ejercicio anterior pero supongamos que ahora tiene un polo simple en el origen. Probar que

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} f(x)e^{ix}dx + \int_{\delta}^{\infty} f(x)e^{ix}dx \right) =$$

$$= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}\right) + \pi i \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}, 0\right)$$

ii) Probar que

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx \right) = \pi i$$

y deducir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

37. **i)** Sea R una función racional con coeficientes reales sin polos sobre el semieje real positivo. Supongamos que $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$. Probar que

$$(1-e^{-2\pi i\alpha}) \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}\right)$$

donde la rama elegida de z^α es la obtenida tomando el argumento de z en $(0, 2\pi)$.

ii) Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}dx$$

para $0 < \alpha < 1$

38. **i)** Para $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, probar que la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$ converge y calcularla integrando en la curva:

−R −r r R

para $r \to 0$ y $R \to \infty$.

39. Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx$ integrando en

$-\mathrm{R}$ R

40. Probar que las siguientes integrales convergen y calcularlas integrando en la curva:

$-r$ ε

$-\mathrm{R}$ R

(a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{x^3+x}$