ANÁLISIS COMPLEJO

Segundo Cuatrimestre 2003

Práctica 2

1. Sea $f\colon\Omega\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Probar que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a+ib$ si y sólo si $\lim\limits_{z\to z_0}\mathrm{Re}(f(z))=a$ y $\lim\limits_{z\to z_0}\mathrm{Im}(f(z))=b$.

2. Sean $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ relacionadas por $g(x,y)=f(x+iy)$.

   i) Suponiendo que f es derivable en $z_0=a+ib$, probar que g es diferenciable en (a,b). Calcular $f'(z_0)$ y $Dg(a,b)$.

   ii) ¿Es cierto que si g es diferenciable en (a,b) entonces f resulta derivable en $a+ib$?

   iii) Hallar todas las funciones $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ derivables en todo punto.

3. Sean $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ y $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ relacionadas por $f(x+iy)=u(x+iy)+i\cdot v(x+iy)$; $g(x,y)=\big(u(x,y),v(x,y)\big)$. Supongamos que f es derivable en z_0.

   i) Calcular $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ y $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\dfrac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih}$ en términos de u y v. ¿Que se deduce?

   ii) Suponiendo que u y v son C^2, calcular $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ y $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

   iii) Si $z_0=a+ib$, probar que g es diferenciable en (a,b). Calcular $|f'(z_0)|$ y el jacobiano de $Dg(a,b)$ en términos de u y v.

4. Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por:

$$f(x+iy)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{si}\quad x+iy\neq 0\\[2ex] 0 & \text{si}\quad x+iy=0\end{cases}$$

Verificar que f es continua en 0 y cumple las condiciones de Cauchy-Riemann pero *no* es derivable.

5. Determinar los puntos donde f es derivable y donde es holomorfa.

i) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x+iy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$ **ii)** $f(z) = \overline{z}$

iii) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$ **iv)** $f(z) = x^2 + iy^2$

6. Analizar donde son holomorfas las siguientes funciones. Hallar $f'(z)$ en cada caso.

i) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ **ii)** $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$

iii) $f(z) = x^2 + iy^3$ **iv)** $f(z) = z^2 \cdot \overline{z}$

v) $f(z) = z^3 - 2z$ **vi)** $f(z) = \dfrac{z+1}{1-z}$

7. Un subconjunto de $\mathbb{C}$ se dice una **región** si es abierto, conexo y no vacío. Probar que todas las componentes conexas de un abierto son regiones.

8. Demostrar que si a una región se le remueven una cantidad finita de puntos, sigue siendo una región.

9. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región. Probar:

i) Si f y $\overline{f}$ son holomorfas en Ω, entonces f es constante.

ii) Si f es holomorfa en Ω y $f' \equiv 0$ en Ω, entonces f es constante.

iii) Si f es holomorfa en Ω y $f' \equiv g'$ entonces $f - g$ es constante.

10. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Demostrar:

i) $Re(f) = cte \Rightarrow f$ cte.

ii) $Im(f) = cte \Rightarrow f$ cte.

iii) $|f| = cte \Rightarrow f$ cte.

iv) $\arg(f) = cte \Rightarrow f$ cte.

11. Sea D un abierto simétrico respecto del eje real y $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa. Probar que la función $g : D \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa.

12. **i)** Sea $L \subseteq \mathbb{R}^2$ una recta. Probar que si $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa e $Im(g) \subseteq L$ entonces g es constante.

ii) Sean $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y $L_1, \cdots, L_N$ rectas (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{C}$). Probar que si $Im(g) \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_N$ entonces g es constante.

13. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Decimos que v es la *conjugada armónica* de u si $f(z) = u + iv$ es holomorfa.

i) Hallar la conjugada armónica de $u(x, y) = x^2 - y^2$ y de $u(x, y) = 2x(1 - y)$

ii) Probar que si v y $\tilde{v}$ son conjugadas armónicas de u, entonces v y $\tilde{v}$ difieren en una constante.

iii) Probar que si u y v son mutuamente conjugadas armónicas; entonces son constantes.

14. Sea $V \subset \mathbb{R}^2$ un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $u : V \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^2$. Probar que si u admite una conjugada armónica entonces u es armónica, es decir, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

15. **Regla de L'Hospital**
Sean f, g funciones holomorfas en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

(Sugerencia: $f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \eta(z)(z - z_0)$ donde $\lim_{z \to z_0} \eta(z) = 0$).

16. Calcular:

i) $\displaystyle\lim_{z \to i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1}$ **ii)** $\displaystyle\lim_{z \to 2i} \frac{z^2 + 4}{2z^2 + (3 - 4i)z - 6i}$

iii) $\displaystyle\lim_{z \to e^{\frac{\pi \cdot i}{3}}} \frac{(z - e^{\frac{\pi \cdot i}{3}}) \cdot z}{z^3 + 1}$ **iv)** $\displaystyle\lim_{z \to i} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1}$

17. Sea $T(z) = \dfrac{z + 1}{z + 2}$

i) Hallar las soluciones de la ecuación $T(z) = z$. Los puntos hallados se llaman los *puntos fijos* de T.

ii) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ arbitrario, se define la sucesión $z_n = T(z_{n-1})$ para $n \geq 0$. Verificar que, si z_n converge, el posible límite es uno de los punto fijos de T.

iii) Se llama *circunferencia isométrica* de T al conjunto $C_T := \{z \in \mathbb{C}/|T'(z)| = 1\}$. Verificar que si $p, q \in C_T$ entonces $|T(p)-T(q)| = |p-q|$. ¿ Que sucede si $|T'(p)|$ y $|T'(q)|$ son mayores (respectivamente menores) que 1?

iv) Calcular $T(C_T)$. Si $R = \{z \in \mathbb{C}/|T'(z)| < 1\}$ y $S = \{z \in \mathbb{C}/|T'(z)| > 1\}$, calcular $T(R)$ y $T(S)$.

v) Ubicar los puntos fijos en R o S. Demostrar que la sucesión definida en ii) converge y hallar su límite.

vi) Si $T(z) = \dfrac{2z+5}{-z-2}$ ¿ Que sucede con la sucesión definida en ii)?