ANÁLISIS COMPLEJO

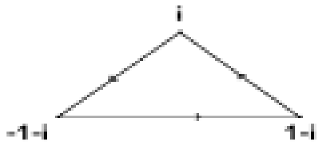
Segundo Cuatrimestre 2003

Práctica 4

1. Calcular

$\int_\gamma \overline{z}dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ $\gamma(t) = e^{it}$

$\int_\gamma |z|^2 z dz$ para γ :



2. Calcular $\int_\gamma (z-a)^n dz$ si n es un entero distinto de -1 y $\gamma : |z-a| = r$.

3. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva. Notamos por $-\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ a la curva $-\gamma(t) = \gamma(1-t)$. Probar que $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$.

4. Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $T(z) = az + b$ con $a \neq 0$. Dadas una curva γ y $c \notin \gamma$, probar que
$$\int_\gamma \frac{dz}{z-c} = \int_{T\circ\gamma} \frac{dz}{z-T(c)}$$

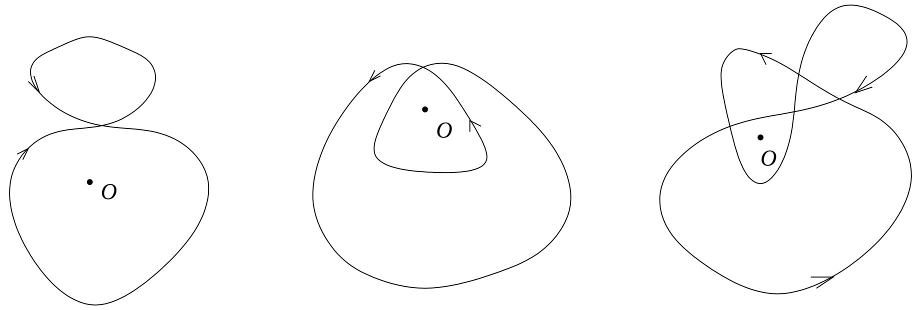
5. Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definida por $\gamma(t) = a + re^{it}$. Probar que $\int_\gamma \frac{dz}{z-b} = 2\pi i$ para todo $b \in B(a,r)$.

6. Sea $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, dada por $\gamma_r(t) = re^{it}$. Probar que $\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}dz \to 0$ cuando $r \to \infty$.

7. Probar que si $d(a,b) > r$ entonces $\int_{|t-a|=r} \frac{dz}{z-b} = 0$.

8. Calcular $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log(1+z)}{(z-\frac{1}{2})^3}dz$ siendo $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ la curva $\gamma(t) = \frac{2}{3}e^{it}$.

9. Evaluar $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}dz$ siendo γ alguna de las siguientes curvas:



10. Encontrar todos los posibles valores de $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$, donde γ es una curva diferenciable que no pasa por $\pm i$.

11. Sea γ la curva cuya imagen es la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ parametrizada por $\gamma(t) = a\cos t + ib\operatorname{sen} t$ con $0 \le t \le 2\pi$.
Calcular $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ y deducir que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$.

12. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada diferenciable a trozos. Sea $\varphi : Im\gamma \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \int_\gamma \varphi(w,z)dw$.
Probar que:

   i) g es continua.

   ii) Si para todo $w \in Im\gamma$, la función $\varphi(w,-) : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa (es decir $\dfrac{\partial\varphi(w,z)}{\partial z}$ es continua), entonces g es holomorfa y $g'(z) = \displaystyle\int_\gamma \frac{\partial\varphi(w,z)}{\partial z}dw$.

13. Sean $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos y $f : Im\gamma \to \mathbb{C}$ una función continua. Definimos $\varphi : Im\gamma \times (\mathbb{C} \setminus Im\gamma) \to \mathbb{C}$ por $\varphi(w,z) = \dfrac{f(w)}{w-z}$ y $g : \mathbb{C}\setminus Im\gamma \to \mathbb{C}$ por $g(z) = \int_\gamma \varphi(w,z)dw$. Probar que g es holomorfa y $g^{(n)}(z) = n!\displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$.

14. Sea γ una curva como en el ejercicio anterior.
Probar:

   i) $\eta(\gamma,a) = -\eta(-\gamma,a)$ donde $-\gamma : [-\beta,-\alpha] \to \mathbb{C}$ se define por $-\gamma(t) = \gamma(-t)$.

   ii) $\eta(\gamma,a) = 0$ para todo $a \notin \triangle = \{z \in \mathbb{C}/|z| \le \max|\gamma|\}$.

   iii) $\eta(\gamma,a)$ es constante como función de a en cada componente conexa de $\mathbb{C}\setminus Im\gamma$.

15. Calcular

$$\int_{\gamma_k} \left(\frac{z}{z+1}\right)^n dz \qquad \gamma_k(t) = 1 + e^{ikt} \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_{\gamma_k} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} dz \qquad \gamma_k(t) = e^{ikt} \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

16. Sea $f_n : A \to \mathbb{C}$. Demostrar que si $(f_n)_{n\in N}$ converge uniformemente a f en una curva $\gamma \subseteq A$ entonces $\int_\gamma f_n(z)dz \longrightarrow \int_\gamma f(z)dz$.

17. Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f_n, f : A \to \mathbb{C}$ tales que $f_n \overset{\text{unif}}{\longrightarrow} f$ en B para todo compacto B de A (notar que f_n puede no tender uniformemente a f en A). Probar que si f_n es holomorfa en A para todo $n \geq n_0$, entonces f es holomorfa en A y $f_n' \overset{\text{unif}}{\longrightarrow} f'$ en B para cada compacto B de A.

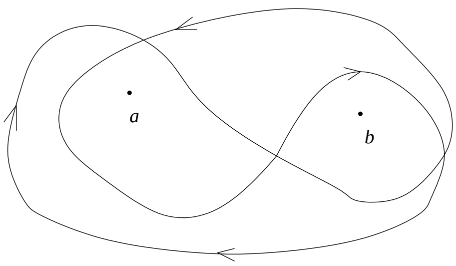
18. Probar que $f(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt^2} dt$ es una función holomorfa en $\operatorname{Re}(z) > 0$.

19. Probar que si $f(z)$ es *continua* en el disco cerrado $|z| \leq r$ y holomorfa en el disco abierto $|z| < r$, se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

para todo $|z| \leq r$.

20. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, $a \neq b$, y sea γ la curva en la siguiente figura:



i) Mostrar que $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$.

ii) *Convencerse* de que γ no es homotópica a cero.

Definición: Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, decimos que una curva γ contenida en él es *homóloga a cero* si $\eta(\gamma, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

iii) Probar que γ es homóloga a cero en Ω.