ANÁLISIS COMPLEJO

Segundo Cuatrimestre 2003

Práctica 5

1. Probar que si Ω es simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f tiene una primitiva en Ω. ¿Es necesaria la hipótesis de simplemente conexo?

2. Sea Ω simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Demostrar que existe una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$. Si $z_0 \in \Omega$ y $e^{w_0} = f(z_0)$ se puede elegir g de modo que $g(z_0) = w_0$.

3. **i)** Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, $f \not\equiv 0$. Probar que para cada $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa con $g(a) \neq 0$ tales que $f(z) = (z-a)^n g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

   ii) Con las hipótesis de i) verificar que el conjunto de ceros de f es discreto. Deducir que en todo compacto de Ω f tiene sólo un número finito de ceros.

4. **i)** ¿Existe f holomorfa en $|z| < 1$ tal que $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

   ii) ¿Existe f holomorfa en un entorno de 0 tal que $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?.

   iii) Idem ii) para $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.

5. Sea $f(z) = \cos\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, $|z| < 1$. Verificar que los ceros de f son los puntos de la forma $z_n = \frac{n\pi-2}{n\pi+2}$ con n impar, que f es holomorfa en $|z| < 1$ y que los ceros de f tienen un punto de acumulación. ¿Es $f \equiv 0$ en $|z| < 1$? ¿Contradice esto algún resultado conocido?

6. Sean f y g dos funciones holomorfas en un abierto conexo Ω del plano complejo, no nulas en Ω; si existe una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de puntos de Ω tales que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad a \in \Omega, \qquad a_n \neq a \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

y además

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

probar que existe entonces una constante c tal que $f(z) = cg(z)$ en Ω.

7. Demostrar que si f y g son holomorfas en Ω y $\overline{f}g$ es holomorfa en Ω, entonces $g \equiv 0$ o f es constante.

8. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica no suryectiva.

   i) Probar que u está acotada superior o inferiormente.

   ii) Probar que u es constante (por lo tanto, toda función armónica es constante o suryectiva).

9. Sea f entera y R un número real positivo tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo z tal que $|z| > R$. Probar que f es un polinomio de grado menor o igual que n.

10. Hallar todas las funciones enteras tales que $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = 5$.

11. Sea f entera tal que existen números complejos z_0, z_1 $\mathbb{R}$-linealmente independientes tales que $f(z + z_0) = f(z)$ y $f(z + z_1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que f es constante.

12. Formular y demostrar el "principio de módulo mínimo" para funciones holomorfas.

13. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ conexo con $\overline{\Omega}$ compacto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y no constante tal que $|f(z)| = \text{cte}$ para todo $z \in \partial\overline{\Omega}$. Probar que existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = 0$.

14. Sea Ω un abierto acotado y conexo y consideremos n puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Probar que el producto $\overline{PP_1} \cdot \ldots \cdot \overline{PP_n}$ de las distancias de un punto P, que recorre la adherencia $\overline{\Omega}$, a los puntos $P_1, \ldots, P_n$ alcanza su máximo en un punto de la frontera de Ω.

15. Sea f una función holomorfa en el disco $|z| < 1$ tal que $|f(z)| < 1$ en este disco; si existen dos puntos a y b del disco distintos, tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces se tiene $f(z) = z$ en el disco. (Sugerencia: Considerar la función

$$g(z) = \frac{h(z) - a}{1 - \overline{a}h(z)}, \quad \text{con} \quad h(z) = f\left(\frac{z + a}{1 + \overline{a}z}\right)$$

y usar el Lema de Schwarz).