ANÁLISIS COMPLEJO

Segundo Cuatrimestre 2003

Práctica 7

Sucesiones de funciones holomorfas

Notaciones: En esta práctica, $\mathcal{D}$ será un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y notaremos $\mathcal{O}(\mathcal{D}) := \{f : \mathcal{D} \to \mathbb{C} / f \text{ es holomorfa}\}$

1. Sea $P_n(z) = 1 + \dfrac{z}{2!} + \cdots + \dfrac{z^n}{(n+1)!}$. Demostrar que dado $R > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale que P_n no tiene ceros reales de módulo menor que R.

2. Probar que la función *gamma*

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

es holomorfa en $\mathrm{Re}(z) > 0$.

3. Probar que $\left\{ \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n \right\}_{n \geq 1}$ converge a e^z en $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

4. **i)** Si $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{O}(\mathcal{D})$ converge uniformemente a f en K compacto y $f(z) \neq 0$, $\forall z \in K$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ f_n no se anula sobre K y $\frac{1}{f_n} \xrightarrow{\text{unif}} \frac{1}{f}$ sobre K.

   ii) Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de funciones en $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ tales que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ en K y $g_n \xrightarrow{\text{unif}} g$ en K entonces $f_n \cdot g_n \xrightarrow{\text{unif}} f \cdot g$ en K.

   iii) Si $K = Im\gamma$, siendo γ una curva tal que $\eta(\gamma, z) = 0$ *o* 1 para todo $z \in \mathbb{C}$ y f es no constante y no nula en K y sean $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{O}(\mathcal{D})$ tal que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ la cantidad de ceros de f_n es igual a la cantidad de ceros de f en $Int(\gamma)$.

5. Sea $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{O}(\mathcal{D})$ tal que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ *ustc* de $\mathcal{D}$ y supongamos que $f \not\equiv 0$, pero existe $a \in \mathcal{D}$ tal que $f(a) = 0$. Probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ existe un número complejo a_n tal que $f_n(a_n) = 0$ y $a_n \to a$.

6. Probar que, dada una sucesión $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{O}(\mathcal{D})$ tal que $f_n \overset{\text{unif}}{\longrightarrow} f$ *ustc* de $\mathcal{D}$ y una sucesión $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{D}$ que converge a $z \in \mathcal{D}$, entonces $f_n(z_n) \to f(z)$.

7. Si $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{O}(\mathcal{D})$ y $f_n \overset{\text{unif}}{\longrightarrow} f$ *ustc* de $\mathcal{D}$, entonces $e^{f_n} \overset{\text{unif}}{\longrightarrow} e^f$ *ustc* de $\mathcal{D}$

<u>Sucesiones de funciones meromorfas</u>

8. **i)** Demostrar que

$$\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}\right)^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

(Sugerencia: observar que ambos miembros de la igualdad son funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ periódicas de período 1, con polos en los todos los enteros n de orden 2 cuya parte singular es $\frac{1}{(z-n)^2}$. Por lo tanto su diferencia es una función entera. Mostrar que ambas funciones tienden a cero cuando $|y| \to +\infty$ uniformemente respecto a x y concluir).

ii) Sumar las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

9. Probar que

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \operatorname{cotg}(\pi z)$$

10. Sea $f(z)$ una función meromorfa de polos simples en los puntos $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ donde $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Sea A_n el residuo de $f(z)$ en cada polo a_n. Supongamos que existe una sucesión de contornos cerrados C_m que verifican:

a. Ningún C_m pasa por ningún a_n.

b. $C_m \subset C_{m+1}^o$

c. Si llamamos $R_m := d(C_m, 0)$ vale que $R_m \to \infty$ cuando $m \to \infty$.

d. Si llamamos $d_m = long(C_m)$, vale que $d_m = O(R_m)$.

e. $\displaystyle\sup_{z\in C_m} \left|\frac{f(z)}{z}\right| \to 0$ cuando $m \to \infty$.

Probar que entonces $\displaystyle f(z) = f(0) + \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right)$.

Sugerencia: Calcular $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{f(\xi)}{\xi(\xi - z)} d\xi$