ANÁLISIS COMPLEJO

Segundo Cuatrimestre 2003

Práctica 8

1. **i)** Verificar que si $|z| < \frac{1}{2}$ entonces:

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\log(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|$$

ii) Probar que el producto $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge absolutamente si y solo si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge absolutamente. Mostrar que el enunciado es falso si no se pide convergencia absoluta.

2. Sea $g(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$. Teniendo en cuenta que $\frac{g'(z)}{g(z)} = \pi \operatorname{cotg}(\pi z)$, demostrar que

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

3. Probar que:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

4. Probar que, para $|z| < 1$:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + z^{2^n}\right) = \frac{1}{1-z}$$

5. Probar que:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

converge absoluta y uniformemente en cualquier compacto.

6. Encontrar el dominio de convergencia de:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + z^{2n}\right),$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n).$$

7. Demostrar que existe f holomorfa en $|z|<1$ que no se extiende a ningún abierto que contenga al disco unitario

8. Probar que, para todo $\alpha \notin \mathbb{Z}$

$$\operatorname{sen}\big(\pi(z+\alpha)\big) = e^{\pi z \operatorname{cotg} \pi\alpha} \operatorname{sen}(\pi\alpha) \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n+\alpha}\right)e^{-\frac{z}{n+\alpha}}$$

9. **i)** Sea $0<|a|<1$ y $|z|\le r<1$. Probar que

$$\left|\frac{a+|a|z}{(1-\overline{a}z)a}\right| \le \frac{1+r}{1-r}$$

ii) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $0<|a_n|<1$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$. Probar que $B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\cdot\frac{(a_n-z)}{(1-\overline{a_n}z)}$ es holomorfa en $|z|<1$ y que $|B(z)|\le 1$. ¿Cuales son los ceros de B?

10. **i)** Probar que si $\operatorname{Re}(s)>1$, la *función zeta de Riemann* definida por $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ está bien definida.

ii) Verificar que si $\operatorname{Re}(s)>1$ entonces $\zeta(s)(1-2^{-s})=\sum_{n \text{ impar}} n^{-s}$.

iii) Demostrar que existen infinitos números primos.

iv) Demostrar que $\frac{1}{\zeta(s)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-p_n^{-s}\right)$ donde $p_1,p_2,\dots,p_n,\dots$ es la sucesión creciente formada por todos los primos positivos.

Automorfismos de la esfera de Riemmann

11. Hallar todos los automorfismos (es decir, las funciones meromorfas con inversa meromorfa) de $\widehat{\mathbb{C}}$. (Sugerencia: Caracterizar primero los automorfismos que dejan fijo a ∞).

Automorfismos de la bola unidad

12. **i)** Sea $D := \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ y $f : D \to D$ tal que $f(0) = 0$. Probar que existe un número real θ tal que $f(z) = e^{i\theta} z$ para todo $z \in D$.

ii) Hallar todos los biholomorfismos de D.

Automorfismos del semiplano de Poincaré

13. Hallar todos los biholomorfismos de $\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ (llamado el semiplano de Poincaré).
(Sug: Caracterizar primero las funciones holomorfas y biyectivas $f : D \to \mathbb{P}$)