

# ANÁLISIS COMPLEJO

Segundo Cuatrimestre 2004

## Práctica 2

1. Sea  $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Probar que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a + ib$  si y sólo si  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = a$  y  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = b$ .
2. Sean  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  relacionadas por  $g(x, y) = f(x + iy)$ .
  - i) Suponiendo que  $f$  es derivable en  $z_0 = a + ib$ , probar que  $g$  es diferenciable en  $(a, b)$ . Calcular  $f'(z_0)$  y  $Dg(a, b)$ .
  - ii) ¿Es cierto que si  $g$  es diferenciable en  $(a, b)$  entonces  $f$  resulta derivable en  $a + ib$ ?
  - iii) Hallar todas las funciones  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  derivables en todo punto.
3. Sean  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  relacionadas por  $f(x + iy) = u(x + iy) + i \cdot v(x + iy)$ ;  $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ . Supongamos que  $f$  es derivable en  $z_0$ .
  - i) Calcular  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$  y  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}$  en términos de  $u$  y  $v$ . ¿Qué se deduce?
  - ii) Suponiendo que  $u$  y  $v$  son  $C^2$ , calcular  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  y  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ .
  - iii) Si  $z_0 = a + ib$ , probar que  $g$  es diferenciable en  $(a, b)$ . Calcular  $|f'(z_0)|$  y el jacobiano de  $Dg(a, b)$  en términos de  $u$  y  $v$ .
4. Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

$$f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } x + iy \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + iy = 0 \end{cases}$$

Verificar que  $f$  es continua en 0 y cumple las condiciones de Cauchy-Riemann pero *no* es derivable.

5. Determinar los puntos donde  $f$  es derivable y donde es holomorfa.

$$\text{i)} \quad f(z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{x^2+y^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases} \quad \text{ii)} \quad f(z) = \bar{z}$$

$$\text{iii)} \quad f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy) \quad \text{iv)} \quad f(z) = x^2 + iy^2$$

6. Analizar donde son holomorfas las siguientes funciones. Hallar  $f'(z)$  en cada caso.

$$\text{i)} \quad f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad \text{ii)} \quad f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$$

$$\text{iii)} \quad f(z) = x^2 + iy^3 \quad \text{iv)} \quad f(z) = z^2 \cdot \bar{z}$$

$$\text{v)} \quad f(z) = z^3 - 2z \quad \text{vi)} \quad f(z) = \frac{z+1}{1-z}$$

7. Un subconjunto de  $\mathbb{C}$  se dice una **región** si es abierto, conexo y no vacío. Probar que todas las componentes conexas de un abierto son regiones.

8. Demostrar que si a una región se le remueven una cantidad finita de puntos, sigue siendo una región.

9. Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  una región. Probar:

i) Si  $f$  y  $\bar{f}$  son holomorfas en  $\Omega$ , entonces  $f$  es constante.

ii) Si  $f$  es holomorfa en  $\Omega$  y  $f' \equiv 0$  en  $\Omega$ , entonces  $f$  es constante.

iii) Si  $f$  es holomorfa en  $\Omega$  y  $f' \equiv g'$  entonces  $f - g$  es constante.

10. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Demostrar:

i)  $\operatorname{Re}(f) = cte \Rightarrow f$  cte.

ii)  $\operatorname{Im}(f) = cte \Rightarrow f$  cte.

iii)  $|f| = cte \Rightarrow f$  cte.

iv)  $\arg(f) = cte \Rightarrow f$  cte.

11. Sea  $D$  un abierto simétrico respecto del eje real y  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Probar que la función  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  es holomorfa.

12. i) Sea  $L \subseteq \mathbb{R}^2$  una recta. Probar que si  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa e  $Im(g) \subseteq L$  entonces  $g$  es constante.

ii) Sean  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y  $L_1, \dots, L_N$  rectas (en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{C}$ ). Probar que si  $Im(g) \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_N$  entonces  $g$  es constante.

13. Sea  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $v$  es la *conjugada armónica* de  $u$  si  $f(z) = u + iv$  es holomorfa.

i) Hallar la conjugada armónica de  $u(x, y) = x^2 - y^2$  y de  $u(x, y) = 2x(1 - y)$

ii) Probar que si  $v$  y  $\tilde{v}$  son conjugadas armónicas de  $u$ , entonces  $v$  y  $\tilde{v}$  difieren en una constante.

iii) Probar que si  $u$  y  $v$  son mutuamente conjugadas armónicas entonces son constantes.

14. Sea  $V \subset \mathbb{R}^2$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^2$ . Probar que si  $u$  admite una conjugada armónica entonces  $u$  es armónica, es decir,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

### 15. Regla de L'Hospital

Sean  $f, g$  funciones holomorfas en  $z_0$  tales que  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  y  $g'(z_0) \neq 0$ . Entonces:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

(Sugerencia:  $f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \eta(z)(z - z_0)$  donde  $\lim_{z \rightarrow z_0} \eta(z) = 0$ ).

16. Calcular:

i)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1}$

ii)  $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 4}{2z^2 + (3 - 4i)z - 6i}$

iii)  $\lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi \cdot i}{3}}} \frac{(z - e^{\frac{\pi \cdot i}{3}}) \cdot z}{z^3 + 1}$

iv)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1}$

17. Sea  $T(z) = \frac{z + 1}{z + 2}$

i) Hallar las soluciones de la ecuación  $T(z) = z$ . Los puntos hallados se llaman los *puntos fijos* de  $T$ .

- ii) Sea  $z_0 \in \mathbf{C}$  arbitrario, se define la sucesión  $z_n = T(z_{n-1})$  para  $n \geq 0$ . Verificar que, si  $z_n$  converge, el posible límite es uno de los puntos fijos de  $T$ .
- iii) Se llama *circunferencia isométrica* de  $T$  al conjunto  $C_T := \{z \in \mathbf{C} / |T'(z)| = 1\}$ . Verificar que si  $p, q \in C_T$  entonces  $|T(p) - T(q)| = |p - q|$ . ¿Qué sucede si  $|T'(p)|$  y  $|T'(q)|$  son mayores (respectivamente menores) que 1?
- iv) Calcular  $T(C_T)$ . Si  $R = \{z \in \mathbf{C} / |T'(z)| < 1\}$  y  $S = \{z \in \mathbf{C} / |T'(z)| > 1\}$ , calcular  $T(R)$  y  $T(S)$ .
- v) Ubicar los puntos fijos en  $R$  o  $S$ . Demostrar que la sucesión definida en ii) converge y hallar su límite.
- vi) Si  $T(z) = \frac{2z + 5}{-z - 2}$ , ¿qué sucede con la sucesión definida en ii)?