

ANÁLISIS COMPLEJO

Segundo Cuatrimestre 2004

Práctica 5

1. Probar que si Ω es simplemente conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f tiene una primitiva en Ω . ¿Es necesaria la hipótesis de simplemente conexo?
2. Sea Ω simplemente conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Demostrar que existe una función holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$. Si $z_0 \in \Omega$ y $e^{w_0} = f(z_0)$ se puede elegir g de modo que $g(z_0) = w_0$.
3. Sea f entera y R un número real positivo tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo z tal que $|z| > R$. Probar que f es un polinomio de grado menor o igual que n .
4. Hallar todas las funciones enteras tales que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 5$.
5. Sea $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ armónica no suryectiva.
 - i) Probar que u está acotada superior o inferiormente.
 - ii) Probar que u es constante (por lo tanto, toda función armónica es constante o suryectiva).
6. Sea f entera tal que existen números complejos z_0, z_1 \mathbb{R} -linealmente independientes tales que $f(z + z_0) = f(z)$ y $f(z + z_1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que f es constante.
7.
 - i) Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $f \not\equiv 0$. Probar que para cada $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $g(a) \neq 0$ tales que $f(z) = (z - a)^n g(z)$ para todo $z \in \Omega$.
 - ii) Con las hipótesis de i) verificar que el conjunto de ceros de f es discreto. Deducir que en todo compacto de Ω f tiene sólo un número finito de ceros.
8.
 - i) ¿Existe f holomorfa en $|z| < 1$ tal que $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?
 - ii) ¿Existe f holomorfa en un entorno de 0 tal que $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

iii) Idem ii) para $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.

9. Sea $f(z) = \cos\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, $|z| < 1$. Verificar que los ceros de f son los puntos de la forma $z_n = \frac{n\pi-2}{n\pi+2}$ con n impar, que f es holomorfa en $|z| < 1$ y que los ceros de f tienen un punto de acumulación. ¿Es $f \equiv 0$ en $|z| < 1$? ¿Contradice esto algún resultado conocido?
10. Sean Ω un abierto conexo del plano complejo y $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas que no se anulan en Ω . Si existe una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ de puntos de Ω tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad a \in \Omega, \quad a_n \neq a \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

y además

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

probar que existe entonces una constante c tal que $f(z) = cg(z)$ en Ω .

11. Demostrar que si Ω es un abierto conexo del plano complejo, f y g son holomorfas en Ω y $\bar{f}g$ es holomorfa en Ω , entonces $g \equiv 0$ o f es constante.
12. Formular y demostrar el “principio de módulo mínimo” para funciones holomorfas.
13. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ conexo con $\bar{\Omega}$ compacto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y no constante tal que $|f(z)| = \text{cte}$ para todo $z \in \partial\bar{\Omega}$. Probar que existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = 0$.
14. Sea Ω un abierto acotado y conexo y consideremos n puntos P_1, P_2, \dots, P_n en el plano \mathbb{R}^2 . Probar que el producto $\overline{PP_1} \cdot \dots \cdot \overline{PP_n}$ de las distancias de un punto P en $\bar{\Omega}$ a los puntos P_1, \dots, P_n alcanza su máximo en un punto de la frontera de Ω .
15. Sea f una función holomorfa en el disco $|z| < 1$ tal que $|f(z)| < 1$ en este disco; si existen dos puntos a y b del disco distintos, tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces se tiene $f(z) = z$ en el disco. (Sugerencia: Considerar la función

$$g(z) = \frac{h(z) - a}{1 - \bar{a}h(z)}, \quad \text{con } h(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)$$

y usar el Lema de Schwarz).